

Лекция 5

Силы инерции.

§ 5-1. Неинерциальные системы отсчета.

Первый закон Ньютона утверждает, что состояния покоя и равномерного прямолинейного движения принципиально неразличимы. Другими словами, - это значит, что законы динамики имеют один и тот же вид в различных инерциальных системах отсчета, т.е. скорость движения системы отсчета не влияет на форму записи законов динамики. Физические утверждения или величины, вид или значения которых не зависят от перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой называются **инвариантами**. В этом смысле можно говорить, что законы Ньютона инвариантны при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Однако ньютоновская механика в неявном виде содержит более сильное утверждение. Так при рассмотрении задачи вычисления первой космической скорости и описании движения автомобиля по выпуклому мосту в уравнениях движения предполагалось, что силы, действующие на тела, имеют одну и ту же величину как в неподвижной системе отсчета, так и в системе отсчета, связанных с самим телом. Фактически это предполагает, что силы остаются инвариантными даже в системах, движущихся с ускорением, т.е. в **неинерциальных** системах. То же самое можно сказать относительно массы, хотя в действительности масса при скоростях, сравнимых со скоростью света может изменяться:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{5-1}$$

где v - скорость тела, c - скорость света, а m_0 - так называемая масса покоя тела. Выражение (5-1) может быть выведено из рассмотрения законов динамики в специальной теории относительности, развитой Эйнштейном.⁹

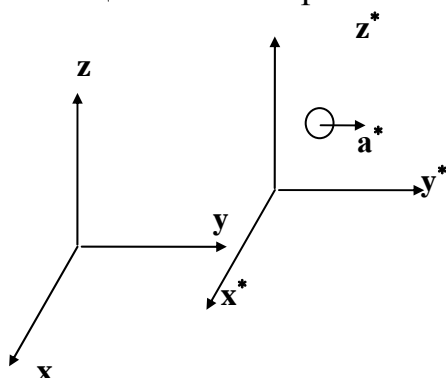


Рис.17. Две системы отсчета.

Если силы и масса являются инвариантами в механике Ньютона, то величина ускорения может быть различной в разных неинерциальных системах. Пусть имеются две системы отсчета XYZ и X* Y* Z* , одна из которых (см. рис 17.) XYZ - покоится, а другая - движется с некоторым ускорением, т.е. является неинерциальной. В силу установленной инвариантности массы и сил в этих системах имеем: $F = F^*$ и $m = m^*$. Если ускорение тела в «звездной» системе отсчета - a^* ,

а сама система движется относительно неподвижной системы с ускорением a_0 , которое называют переносным ускорением, то общее ускорение тела относительно системы XYZ складывается из этих ускорений:

$$a = a_0 + a^* . \tag{5-2}$$

Кроме этого возможен еще один вклад в выражение полного ускорения. Для по-

⁹ Теория базируется на постулате постоянства скорости света как максимально возможной скорости передачи информации и преобразованиях Лоренца. В нашем курсе она изучаться не будет.

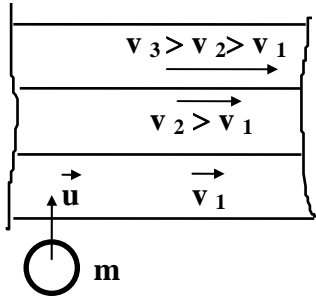


Рис.18. «Движущийся тротуар.»

яснения рассмотрим так называемый «движущийся тротуар» - систему параллельных движущихся с различной скоростью дорожек (см рис.18.) Если тело движется перпендикулярно дорожкам, то при переходе с одной дорожки на другую его скорость будет изменяться. Быстрота изменения скорости определяется двумя факторами: величиной различия скоростей двух соседних дорожек и быстротой перехода тела с одной дорожки на другую, т.е.

$$\vec{a}_K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} . \quad (5-3)$$

Это ускорение называется **кориолисовым** или поворотным. Направление этого ускорения определяется направлением $\vec{\Delta v} = \vec{v}_{i+1} - \vec{v}_i$ ($i = 1, 2, \dots$) - на рис.18 вправо по отношению к вектору скорости \vec{u} , т.е. перпендикулярно ему. Из курса метеорологии известно, что этот вид ускорения проявляется во вращающихся системах координат. Величину кориолисова ускорения во вращающейся системе координат

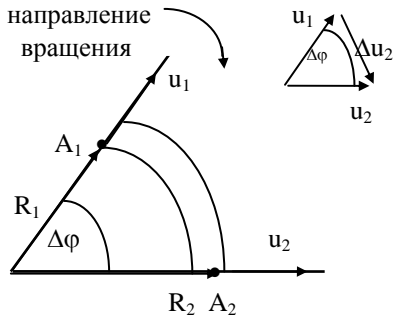


Рис.19. Определение величины ускорения Кориолиса.

можно определить из рассмотрения рис.19. На нем тело участвует в двух движениях: вращательном с угловой скоростью ω , направленной от читателя перпендикулярно листу, и равномерного со скоростью u , направленной по радиусу вращения. Пусть за малый промежуток времени Δt тело сместится вдоль радиуса на расстояние $\Delta R = R_2 - R_1$ и при этом повернется на угол $\Delta \phi = \omega \Delta t$, занимая точки A_1 и A_2 соответственно. Общее изменение скорости состоит из двух слагаемых, одно из которых

связано с увеличением тангенциальной скорости вращательного движения при переходе от меньшего радиуса R_1 к большему R_2 , т.е. $\Delta u_1 = \omega \Delta R = \omega (R_2 - R_1)$. Второе слагаемое Δu_2 , изображенное на рис 19 в правом верхнем углу, обусловлено поворотом вектора u при переходе из положения A_1 в положение A_2 :

$$\Delta u_2 = u \Delta \phi = u \omega \Delta t . \quad (5-4)$$

Направление слагаемого Δu_1 как и на рис.18 направлено перпендикулярно \vec{u} , т.е. вниз. При стремлении Δt к нулю направление Δu_2 также стремится к перпендикулярю к \vec{u} . Поэтому при $\Delta t \rightarrow 0$ оба слагаемых совпадают по направлению и

$$\vec{a}_K = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\omega \Delta R}{\Delta t} + \frac{\omega \Delta t u}{\Delta t} \right) = 2\omega u , \quad (5-5)$$

т.к. по смыслу $\vec{u} = \frac{dR}{dt}$. Оба множителя, входящие в правую часть выражения

(5-5), являются векторами. Ускорение \vec{a}_K - тоже вектор, поэтому в правой части (5-5) должно стоять векторное произведение. Порядок множителей в этом произведении должен быть такой, чтобы само произведение было направлено вправо от направления u , поэтому

$$\vec{a}_K = 2[\omega \vec{u}] . \quad (5-6)$$

Возвращаясь к рассмотрению ускорения тела в неподвижной системе отсчета, теперь можно утверждать, что оно состоит из трех слагаемых:

$$a = a_0 + a^* + a_K. \quad (5-7)$$

§ 5-2. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчета.

Как уже установлено, величина сил и масс являются инвариантами в механике Ньютона, поэтому уравнения движения в неподвижной и неинерциальной системах отсчета записываются следующим образом:

$$ma = m(a_0 + a^* + a_K) = \sum_i F_i, \quad (5-8)$$

$$m^* a^* = \sum_i F_i^*, \quad (5-9)$$

причем $m = m^*$, а $\sum_i F_i = \sum_i F_i^*$. Переписывая (5-8), получим

$$m^* a^* = \sum_i F_i - m a_0 - m a_K \quad (5-10)$$

или
$$m^* a^* = \sum_i F_i^* - m a_0 - m a_K. \quad (5-10a)$$

Сравнивая уравнения (5-9) и (5-10a), можно заметить, что второй закон Ньютона сохранит свой смысл, если члены $(-m a_0)$ и $(-m a_K)$ трактовать как некоторые

дополнительные силы, возникающие в неинерциальной системе отсчета и получившие название **сил инерции**. ($f_{\text{инерц}}^0 = -m a_0$ и $f_{\text{инерц}}^K = -m a_K$). Первая из сил, стоящих в скобках представляет собой так называемую переносную силу инерции, а вторая - силу инерции Кориолиса. Примером проявления переносной силы инерции может служить поведение пассажиров в переполненном автобусе при его резком торможении, когда какая-то «непонятная сила» заставляет всех их дружно «валиться» вперед по ходу движения. Сила инерции Кориолиса объясняет такие явления как отклонение Гольфстрима к северо-востоку, направление пассатов, дующих из области высокого давления в сторону экватора, рельеф берегов рек, текущих в меридианальном направлении, отклонение снарядов, выпущенных из огнестрельного оружия и т.п.¹⁰

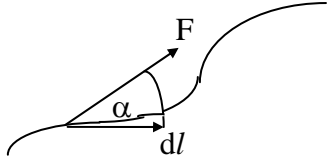
¹⁰ Существует правило, определяющее направление силы Кориолиса, которое гласит, что в северном полушарии силы инерции стремятся отклонить тело вправо, если смотреть по ходу движения, а в южном - влево. Следует помнить, однако, что это правило получено в некотором приближении. Более точное решение задачи на вычисление полного выражения силы Кориолиса показывает наличие вертикальной составляющей такой силы.

Лекция 6

Работа и энергия.

§ 6-1. Определение работы силы.

Элементарной работой dA силы F на перемещении dl называется их скалярное произведение (см. рис.20):



$$dA = (\vec{F} \vec{dl}) = F dl \cos \alpha . \quad (6-1)$$

Скалярное произведение (6-1) может быть представлено в несколько ином виде:

$$dA = F_l dl \quad (6-1^*)$$

$$dA = F dl_F , \quad (6-1^{**})$$

Рис.20. Величина элементарной работы.

или где $F_l = F \cos \alpha$ представляет собой проекцию силы на направление перемещения, а $dl_F = dl \cos \alpha$ - проекцию перемещения на направление силы. В декартовой системе координат величину элементарной работы (по правилам записи скалярного произведения) можно записать так:

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz , \quad (6-2)$$

где F_x, F_y, F_z - проекции силы на оси координат и dx, dy, dz - соответствующие проекции перемещения.

Для подсчета работы переменной силы на конечном перемещении необходимо просуммировать все элементарные работы:

$$A = \sum_{i=1}^n (F dl \cos \alpha)_i . \quad (6-3)$$

Если сила - непрерывная функция координат, то суммирование заменяется интегрированием, и

$$A = \int_a^b F \cos \alpha dl = \int_a^b F_l dl = \int_a^b F dl_F . \quad (6-4)$$

В качестве примера рассмотрим вычисление работы центральной силы, т.е. силы, которая действует по прямой, соединяющей взаимодействующие тела (материальные точки), и величина этой силы зависит только от расстояния. Пусть материальная точка А действует на другую точку В центральной силой F . Точка В

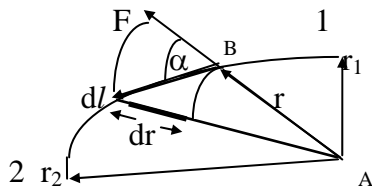


Рис.21. Работа центральной силы.

перемещается из положения 1 с радиусом-вектором r_1 в точку 2, радиус-вектор которой - r_2 (см. рис.21). Выбирая на этом участке траектории малое перемещение dl , запишем выражение для элементарной работы:

$$dA = F dl_F ,$$

Из рис. 21 видно, что $dl \cos \alpha = dr$ представляет собой изменение радиуса на малом перемещении dl . Поэтому элементарная работа $dA = F(r) dr$, т.к. сила зависит только

ко от расстояния. Полная работа силы на участке траектории 1-2 находится суммированием всех элементарных работ, т.е.

$$A_{12} = \int_1^2 F(r) dr = U(r) \Big|_1^2 = U(r_2) - U(r_1), \quad (6-5)$$

где $U(r)$ - первообразная для функции $F(r)$.

Для силы тяготения, которая также является центральной силой, работа при увеличении расстояния от земной поверхности от r_1 до r_2 согласно выражению (6-5) равна:

$$A_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = -Gm_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = Gm_1 m_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = Gm_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (6-6)$$

Знак минус перед выражением интеграла соответствует тому, что при **увеличении** расстояния от Земли приходится затрачивать работу, т.е. совершать отрицательную работу. Очевидно, что полная работа против силы тяжести при изменении расстояния от R_3 (где R_3 - радиус Земли) до бесконечности (тело удаляется на бесконечно большое расстояние от Земли, т.е. $r_2 \rightarrow \infty$) равна:

$$A_{\infty} = -\frac{Gm_1 M_3}{R_3}. \quad (6-7)$$

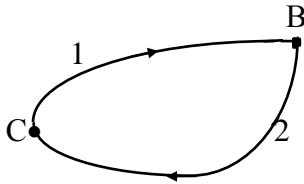


Рис.22. Работа центральной силы по замкнутому пути.

Если работа силы не зависит от формы пути, а определяется начальным и конечным положением материальной точки, то ее величина на отрезке BC (см. рис.22) по пути 1 равна работе этой же силы на пути 2, но работа A_1 противоположна по знаку работе A_2 :

$$A_1 = \int_C^B F(r)dr = -\int_B^C F(r)dr = -A_2. \quad (6-8)$$

Тогда сумма работ по замкнутому пути равна $A_1 + A_2 = 0$. В математике такая сумма называется циркуляцией:

$$\oint F(r)dr = 0. \quad (6-9)$$

Силы, работа которых не зависит от формы пути и для которых выполняется условие (6-9), получили название **потенциальных**. К потенциальным силам относятся упругие силы $F = -kx$, т.к. работа этих сил, определяемая как

$$A_y = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) \quad (6-10)$$

не зависит от формы пути, и для них также справедливо соотношение (6-9).

Примером **непотенциальных** сил являются силы трения, работа которых явно зависит от формы траектории движения тела.

§ 6-2. Потенциальная энергия.

Пусть имеются две материальные точки С и D (см. рис.23.), взаимодействие которых можно охарактеризовать центральными силами, и пусть их взаимное положение (конфигурация) изменилось за счет того, что точка С переместилась в новое положение C^* , а точка D осталась на месте. Тогда центральная сила F_{DC} совершит некоторую работу на отрезке CC^* , величину которой можно обозначить A_{CC^*} . Очевидно, что это не единственный способ изменения

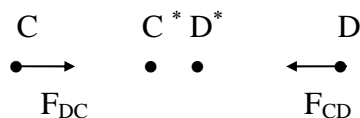


Рис.23. Изменение конфигурации расположения точек.

конфигурации расположения точек: та же самая конфигурация может быть достигнута, если точка С вообще остается на месте, а точка D перемещается в новое

положение D^* при условии, что $DD^* = CC^*$. В этом случае работу A_{DD^*} совершает сила F_{CD} . По третьему закону Ньютона $F_{CD} = F_{DC}$, и $A_{CC^*} = A_{DD^*}$, т.к. работа центральных сил, как было показано, зависит лишь от начального и конечного расположения взаимодействующих точек.

Наконец, та же самая конфигурация может быть получена при обоюдном перемещении точек C и D . В этом случае работу совершают обе силы F_{CD} и F_{DC} , но их **общая** работа останется той же самой, если сумма перемещений точек по-прежнему равна DD^* или CC^* . Полученный вывод можно распространить и на **систему** материальных точек: суммарная работа всех потенциальных сил взаимодействия зависит лишь от начальной и конечной конфигурации системы. Знак работы при этом может, вообще говоря, любым - работа может как положительной так и отрицательной. Когда работа отрицательна, т.е. угол между силой и перемещением равен 180^0 , то ее можно совершить лишь за счет внешнего воздействия, и, наоборот, работа положительная (направление перемещения совпадает с направлением силы) может совершаться системой без какого-либо внешнего воздействия. Например, для сжатия пружины нужно приложить некоторое усилие, а сжатая пружина, распрямляясь, сама способна совершить работу. В этом случае говорят, что положительная работа совершается за счет «запаса» этой работы в самой системе. Если в системе материальных точек действует несколько различных по своей природе потенциальных сил, которые в этом случае называются **внутренними**, то общий «запас» положительной работы складывается из «запасов» каждого из видов взаимодействия. Поскольку выбор начальной конфигурации весьма условен, то можно утверждать, что практически любой конфигурации соответствует определенный «запас» положительной работы. Величину «запаса» этой работы при данной конфигурации системы материальных точек принято называть **потенциальной энергией U** . При совершении системой положительной работы величина потенциальной энергии уменьшается. Наоборот, если над системой внешние силы совершают работу, которая считается отрицательной, то потенциальная энергия системы увеличивается. Из этого следует, что

$$\Delta U = U_2 - U_1 = - A_{12}, \quad (6-11)$$

т.е. изменение потенциальной энергии при некотором изменении конфигурации определяется суммарной работой всех внутренних потенциальных сил, взятой с обратным знаком. Точка начала отсчета потенциальной энергии может быть выбрана произвольно, т.к. для решения практических задач важным оказывается не сама величина потенциальной энергии, а лишь ее изменения. Например, можно считать, что камень, лежащий на поверхности Земли, имеет нулевую потенциальную энергию, хотя если ему предоставить возможность падать к центру Земли, то окажется, что ее потенциальная энергия совсем не равна нулю. Важно отметить, что любая система стремится по возможности уменьшить свою потенциальную энергию. Поэтому устойчивое состояние системы соответствует минимуму потенциальной энергии.

§ 6-3. Кинетическая энергия.

Если на тело массы m действует некоторая сила F , сообщая ему ускорение a , то эта сила совершает определенную работу, которая связана с изменением скорости тела. Величина элементарной работы определяется так же, как и ранее:

$$dA = F \cos\alpha dl = ma \cos\alpha dl,$$

где направление силы совпадает с направлением ускорения. Тогда $a \cos\alpha = a_t$ является проекцией ускорения на направление перемещения, т.е. тангенциальной составляющей полного ускорения, которая характеризует изменение скорости по абсолютной величине: $a_t = \frac{dv}{dt}$. С учетом этого выражение для dA равно:

$$dA = ma_t dl = m \frac{dv}{dt} dl. \quad (6-12)$$

Пусть dt - промежуток времени, за который тело проходит отрезок dl . Тогда

$$dA = m \frac{dl}{dt} dv = mvdv, \quad (6-13)$$

т.к. $\frac{dl}{dt} = v$ - скорость тела за промежуток времени dt . Принимая во внимание, что в механике Ньютона масса не зависит от скорости, выражение (6-13) можно преобразовать к виду

$$dA = m d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT, \quad (6-14)$$

где величина $T = \frac{mv^2}{2}$ называется **кинетической энергией** тела. На конечном участке траектории величина работы равна

$$A = \int_{t_1}^{t_2} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = T_2 - T_1 = \Delta T, \quad (6-15)$$

т.е. изменение кинетической энергии тела за некоторый промежуток времени равно суммарной работе, совершенной всеми силами, действующими на тело в этот же промежуток времени.

§ 6-4. Закон изменения и сохранения механической энергии.

Полная механическая энергия системы материальных точек E складывается из его кинетической энергии T и потенциальной энергии U , т.е.

$$E = T + U. \quad (6-16)$$

При движении точек внутри системы изменяются как скорости точек, так и их взаимное расположение. Пусть скорость произвольной точки (i - точки) изменяется под действием сил со стороны других точек. Полное изменение кинетической энергии i - точки в соответствии с выражением (6-15) определяется работой всех сил, действующих на эту точку - как внутренних так и внешних:

$$\Delta T_i = A_i. \quad (6-17)$$

Сложив выражения (6-17) для всех точек системы, получим:

$$\sum_{i=1}^n \Delta T_i = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (6-18)$$

Левая часть этого уравнения является кинетической энергией всей системы, которую можно обозначить ΔT , а правая часть есть общая работа всех сил, которую можно представить как сумму трех слагаемых:

1. работы всех внутренних потенциальных сил - $A_{\text{внутр. пот}}$;
2. работы всех внутренних непотенциальных сил - $A_{\text{внутр. непот}}$;

3. работы всех внешних сил - $A_{\text{внеш}}$. При этом надо учесть, что суммарная работа всех внутренних потенциальных сил с обратным знаком равна изменению потенциальной энергии системы ΔU . Поэтому равенство (6-18) приобретает такой вид: $\Delta T = -\Delta U + A_{\text{внутр. непотен}} + A_{\text{внеш}}$. Переносим ΔU в левую часть этого равенства и замечая, что $\Delta T + \Delta U = \Delta E$, получим:

$$\Delta E = A_{\text{внутр. непотен}} + A_{\text{внеш}}. \quad (6-19)$$

Выражение (6-19) представляет собой **закон изменения механической энергии**: изменение полной механической энергии системы материальных точек за некоторый промежуток времени равно суммарной работе всех внутренних непотенциальных и всех внешних сил за этот промежуток времени.

Если система замкнута, т.е. на нее не действуют никакие внешние силы или сумма всех внешних сил равна нулю, а все внутренние силы являются потенциальными, то $\Delta E = 0$, и выражение

$$E = T + U = \text{const} \quad (6-20)$$

представляет собой закон **сохранения полной механической энергии**.

В качестве примера применения этого закона рассмотрим вывод так называемой второй космической скорости, под которой подразумевается скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно оказалось способным преодолеть притяжение Земли. Для этого используем выражение (6-7) для работы силы тяжести при удалении тела на бесконечно большое расстояние от Земли:

$$A_{\infty} = - \frac{Gm_1M_3}{R_3}.$$

Т.к. гравитационные силы потенциальны, величина этой работы, взятая с обратным знаком, определяет значение потенциальной энергии притяжения тела к Земле - $A_{\infty} = -U$. Тогда из закона сохранения энергии следует что, тело может преодолеть притяжение Земли, если ему сообщить кинетическую энергию T_{II} , которая равна потенциальной энергии притяжения:

$$\frac{mv_{II}^2}{2} = G \frac{M_3}{R_3} = G \frac{M_3}{R_3} \frac{R_3}{R_3} = G \frac{M_3}{R_3^2} R_3 = gR_3,$$

(g - ускорение свободного падения на поверхности Земли), откуда следует, что вторая космическая скорость V_{II} равна:

$$V_{II} = \sqrt{2gR_3} \approx 11,2 \text{ км/с}. \quad (6-21)$$

Лекция 7.

Колебания.

§ 7-1. Гармонические колебания.

Колебаниями называются такие изменения какой - либо физической величины, когда эта величина через определенные промежутки времени принимает одни и те же значения. Любое колебание может быть охарактеризовано такими параметрами:

1. амплитудой колебаний, т.е. величиной наибольшего отклонения от положения равновесия,
2. периодом колебаний, т.е. временем одного полного колебания; величина, обратная периоду называется частотой;
3. законом изменения колеблющейся величины со временем; гармоническое колебание происходит по закону синуса или косинуса;
4. фазой колебаний, характеризующей состояние колебаний в любой момент времени.

Гармоническое колебание может быть представлено в трех видах: графическом, аналитическом и векторным. Графическое представление колебаний изображено на рис.24. Аналитическое представление гармонических колебаний не менее известно:

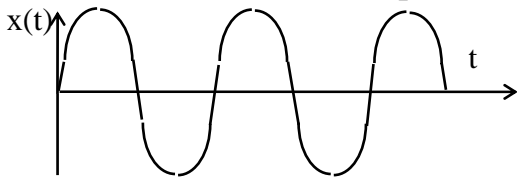


Рис.24. Графическое представление колебаний.

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (7-1)$$

где φ - начальная фаза колебаний, а весь аргумент синуса ($\omega t + \varphi$) - **фаза колебания**, A - амплитуда колебаний, а $\omega = 2\pi / T$ - угловая частота колебаний (T - период колебаний).

Наконец, в векторном представлении колебание представляется в виде вектора,

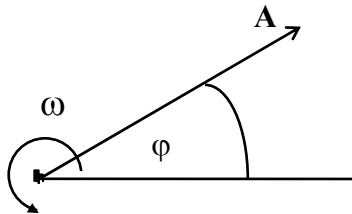


Рис.25. Векторное представление колебаний.

длина которого пропорциональна амплитуде колебаний (см. рис 25). Сам вектор вращается в плоскости чертежа с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости и проходящей через начало вектора колебания. Первоначальное отклонение вектора от горизонтали изображает начальную фазу колебания. Этот вид представления колебаний особенно

удобен для сложения колебаний, когда результирующее колебание находится как векторная сумма всех слагаемых, и будет использоваться во всем курсе.

§ 7-2. Сложение гармонических колебаний.

Наиболее простым примером является сложение двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты, каждое из которых можно

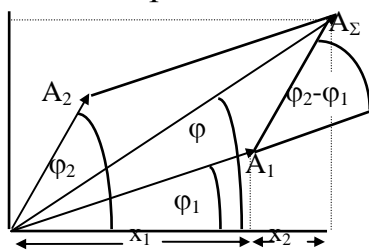


Рис.26. Сложение двух колебаний.

представить в аналитическом виде $x_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ и $x_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ и векторном виде - см. рис.26. Поскольку оба слагаемых вращаются с одинаковой частотой, суммарный вектор также вращается с этой же частотой, т.е. результатом суммы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ будет гармоническое колебание той же частоты, амплитуда которого находится как диагональ параллелограмма A_Σ ,

построенного на векторах A_1 и A_2 :

$$A_{\Sigma}^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad (7-2)$$

разность $\varphi_2 - \varphi_1$ определяется из рисунка 26. Величина начальной фазы φ результирующего колебания определяется из величины тангенса этого угла:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_{\Sigma y}}{A_{\Sigma x}},$$

где $A_{\Sigma y}$ и $A_{\Sigma x}$ представляют собой проекции амплитуды суммарного колебания на оси Y и X соответственно. Как следует из рисунка, значение $A_{\Sigma x}$ равно сумме проекций на ось X каждого из слагаемых колебаний:

$$A_{\Sigma x} = X_2 + X_1 = A_2 \cos \varphi_2 + A_1 \cos \varphi_1. \quad (7-3)$$

Аналогичное выражение может быть получено и для суммарной проекции на ось Y (для простоты Y - проекции на рис.26 не показаны):

$$A_{\Sigma y} = Y_2 + Y_1 = A_2 \sin \varphi_2 + A_1 \sin \varphi_1. \quad (7-4)$$

Тогда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (7-5)$$

Таким образом определены основные параметры суммарного колебания: амплитуда, частота и начальная фаза. Несколько сложнее найти сумму двух колебаний, если их частоты отличаются друг от друга. Практически интересным является случай, когда это различие незначительно, т.е. $\omega_1 = \omega_0 + \Omega$ и $\omega_2 = \omega_0 - \Omega$, причем $\Omega \ll \omega_0$. Пусть для простоты амплитуды обоих колебаний и их начальные фазы одинаковы. Тогда $x_1(t) = A \sin(\omega_0 + \Omega)t$ и $x_2(t) = A \sin(\omega_0 - \Omega)t$. Суммируя эти выражения, получим

$$x_1(t) + x_2(t) = A \{ \sin(\omega_0 + \Omega)t + \sin(\omega_0 - \Omega)t \} = [2A \cos \Omega t] \sin \omega_0 t, \quad (7-6)$$

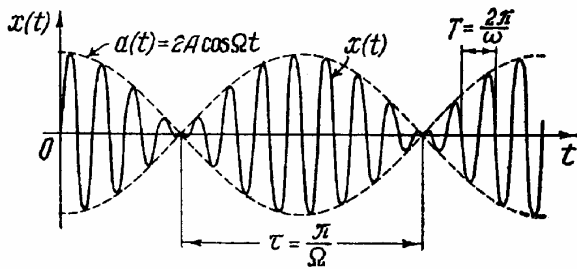


Рис.27. Биения.

где величину, стоящую в квадратных скобках, можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду. Результат суммы таких колебаний, представленный на рис.27

, называется **биениями**. Примером биений является известное «завывание» двигателей многомоторных самолетов, при условии их грамотной технической эксплуатации. Если

амплитуды слагаемых колебаний неодинаковы, то картина наблюдающихся биений

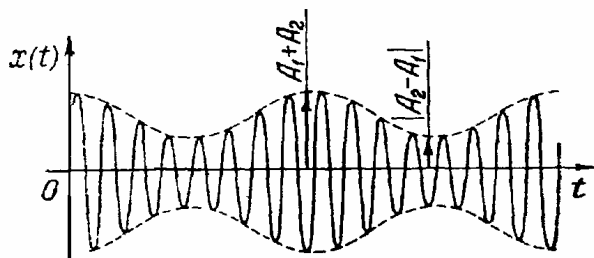


Рис.28. Сумма колебаний с близкими частотами разных амплитуд.

отличается от предыдущей, т.к. теперь суммарная амплитуда изменяется от значения $A_1 + A_2$ до минимума $A_1 - A_2$. Важно отметить, что в обоих случаях суммарное колебание не является гармоническим, хотя оно и записывается в виде произведения гармонических функций, т.к. его амплитуда не остается постоянной и медленно изменяется с течением времени. (рис.28).

§ 7-3. Сложение перпендикулярных колебаний.

Пусть имеются два гармонических колебания одинаковой частоты, направления колебаний которых взаимно перпендикулярны друг другу. Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза одного из колебаний была равна нулю. При таком условии колебания можно записать так:

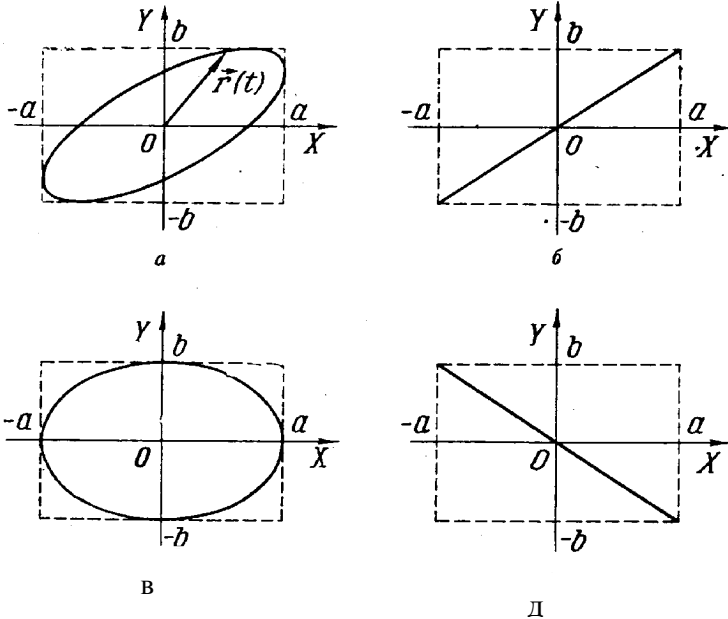


Рис.29. Результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты.

отсчета времени так, чтобы начальная фаза одного из колебаний была равна нулю. При таком условии колебания можно записать так:

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega t, \\ y &= b \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned}$$

где величина φ представляет разность фаз обоих колебаний. Первое уравнение можно переписать так:

$$\sin \omega t = \frac{x}{a}; \quad (7-7)$$

тогда как второе после преобразования по формуле суммы синусов двух углов принимает вид

$$\sin \omega t \cos \varphi + \cos \omega t \sin \varphi = \frac{y}{b}. \quad (7-8)$$

Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \quad (7-9)$$

Заменяя в уравнении (7-8) $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ их эквивалентами из уравнений (7-7) и (7-9), можно найти:

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{a} \cos \varphi \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

или

$$\frac{y}{b} - \frac{x}{a} \cos \varphi = \mp \sin \varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (7-10)$$

Возводя обе части уравнения (7-10) в квадрат и учитывая, что $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \varphi = \sin^2 \varphi. \quad (7-11)$$

Уравнение (7-11) является уравнением эллипса, оси которого повернуты относительно осей координат (см. рис.29а). При $\sin \varphi = 0$ и $\sin \varphi = \pi$ эллипс вырождается в прямую (рис.29 в и д)

$$y = \pm \frac{bx}{a}. \quad (7-12)$$

При разности фаз между колебаниями $\pi/2$ оси эллипса совпадают с осями

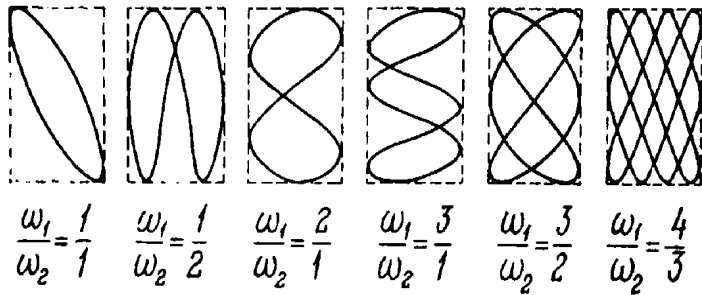


Рис.30. Фигуры Лиссажу.

координат (рис.29 в). Если частоты складываемых колебаний отличаются друг от друга, то форма кривой, которую описывает радиус-вектор суммарного колебания становится очень сложной и зависит от соотношения складываемых частот. Для некоторых соотношений частот складываемых колебаний получающиеся фигуры, называемые **фигурами Лиссажу**, показаны на рис.30 .

§ 7-4. Понятие о разложении колебаний в ряд Фурье.

В математике существует так называемая теорема Фурье, согласно которой любой периодический процесс $x(t)$ с периодом T может быть представлен в виде бесконечной суммы гармонических колебаний с частотами, кратными величине $\omega = 2\pi/T$:

$$x(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (7-13)$$

которую принято называть **рядом Фурье**. Каждая из слагаемых суммы (7-13) представляет собой отдельную гармонику, амплитуда и начальная фаза которой зависит от вида функции $x(t)$. Совокупность амплитуд и частот, на которые разлагается любое негармоническое колебания, образуют **спектр** этого колебания. Гра-

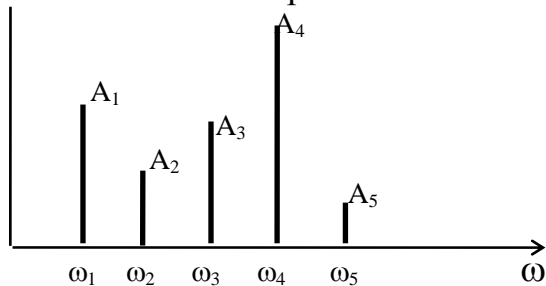


Рис.31. Графическое представление спектра.

фическое изображение спектра приведено на рис.31. Как видно из рисунка, каждая составляющая спектра изображается в виде вертикальных линий, основание которых расположено в соответствующих местах оси частот , а длина каждой из линий пропорциональна величине амплитуды выбранной гармоники. Не следует думать, однако, что спек-

тральное разложение имеет только математический смысл. В реальных физических процессах, зависящих от времени, всегда удается выделить гармонические колебания, частота и амплитуда которых полностью соответствуют гармоникам разложения в ряд Фурье¹¹. Примером спектрального представления может служить разложение импульса длительности τ , когда величина спектральной частоты определяется соотношением

$$\omega_{\text{спектр}} = \frac{2\pi}{\tau}. \quad (7-14)$$

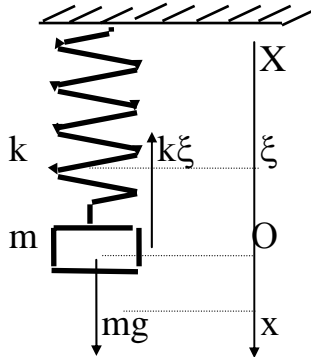
¹¹ Непериодическая физическая величина может быть представлена в виде **интеграла Фурье**, содержащего бесконечно много спектральных составляющих.

Лекция 8.

Дифференциальное уравнение колебаний.

§ 8-1. Свободные колебания.

Рассмотрим колебания груза массы m , висящего на пружине, жесткость которой k . Направим ось координат X вертикально вниз, причем за начало отсчета примем точку O (рис. 32), лежащую на одном уровне с центром масс m , когда груз неподвижен. При этом пружина растянута на величину ξ по сравнению с недеформированным состоянием. Величина упругой силы, действующей на массу m , равна $k\xi$. В положении равновесия



Если теперь сместить груз из положения равновесия, то он начнет совершать колебательное движение. Колебания, которые происходят в системе, выведенной из положения равновесия и затем предоставленной самой себе, называются **свободными или собственными колебаниями**, а частота, с которой происходят эти колебания называется **собственной частотой**.

$$mg - k\xi = 0. \quad (8-1)$$

Рис.32. Колебания груза на пружине.

Пусть в некоторый момент времени смещение груза равно x . Тогда второй закон Ньютона в проекции на ось X может быть записан в следующем виде: $ma_x = mg - k(x + \xi)$ или с учетом (8-1)

$$ma_x = -kx. \quad (8-2)$$

В свою очередь, уравнение (8-2) можно записать иначе, если представить ускорение тела через вторую производную смещения по времени $a_x = d^2x/dt^2$ и обозначить величину $k/m = \omega_0^2$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x. \quad (8-3)$$

Уравнение (8-3) является дифференциальным уравнением второго порядка, однако его решение можно просто угадать простым перебором всех элементарных функций, из которых только функции синуса и косинуса удовлетворяют решению этого уравнения. Действительно, если

смещение $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (8-4)$

то скорость тела $\frac{dx}{dt} = v = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (8-5)$

и ускорение тела $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (8-6)$

Сравнение (8-4) и (8-6) показывает, что действительно (8-4) является решением уравнения (8-3). Величины A и φ остаются произвольными, для их определения необходимо использовать **начальные условия**, т.е. значения смещения и скорости тела в начальный момент времени. Например, если при $t = 0$ $x(0) = 0$, а $v(0) = v_0$, то из (8-4) следует, что $\sin\varphi = 0$ и $\varphi = 0$, а из (8-5) величина $A = v_0/\omega_0$.

При этих условиях решением уравнения (8-3) служит функция $x(t) = \frac{V_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$.

Задание тех или иных начальных условий обычно определяется конкретными условиями поставленной задачи.

§ 8-2. Затухающие колебания.

В реальной жизни любой колебательный процесс постепенно затухает из-за наличия сил трения. Для колебаний груза на пружине существенную роль играет так называемое вязкое трение, сила которого при малых смещениях оказывается пропорциональной величине скорости тела:

$$F_{\text{трени}} = -bv = -b \frac{dx}{dt}. \quad (8-7)$$

В этом случае второй закон Ньютона (уравнение движения) для груза, колеблющегося на пружине, приобретает такой вид:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} + mg - k(x + \xi). \quad (8-8)$$

Вводя обозначения $\beta = \frac{b}{2m}$, это уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8-9)$$

где по-прежнему $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Решение этого дифференциального уравнения может быть получено обычным способом, но можно показать, что уравнение (8-9) можно свести к уравнению типа (8-3). Для этого достаточно ввести замену переменных $x(t) = z(t)e^{-\beta t}$. Проводя операцию дифференцирования, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} - \beta z e^{-\beta t}; & 2\beta \frac{dx}{dt} &= 2\beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} - 2\beta^2 z e^{-\beta t}; \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2 \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + \beta^2 z e^{-\beta t}, & \omega_0^2 x &= \omega_0^2 z e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение (8-9) может быть записано в таком виде:

$$\frac{d^2z}{dt^2} e^{-\beta t} - 2 \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} + \beta^2 z e^{-\beta t} + 2\beta \frac{dz}{dt} e^{-\beta t} - 2\beta^2 z e^{-\beta t} + \omega_0^2 z e^{-\beta t} = 0$$

После сокращения на величину $e^{-\beta t}$ и приведения подобных членов получаем:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (\omega_0^2 - \beta^2)z = 0. \quad (8-10)$$

Сравнивая полученное уравнение с выражением (8-3), нетрудно заметить их почти полную идентичность; различие состоит лишь в том, что частота колебаний в (8-10) определяется из формулы $\omega_3^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Таким образом решение уравнения (8-9) имеет вид:

$$x(t) = A e^{-\beta t} \sin(\omega_3 t + \varphi), \quad (8-11)$$

где как и ранее величины A и φ определяются из начальных условий. В большинстве случаев $\beta \ll \omega_0$ и $\omega_3 \approx \omega_0$. Решение (8-11) представляет уже негармоническое колебание, т.к. его амплитуда $A e^{-\beta t}$ уменьшается с течением времени. Отно-

сительное изменение амплитуды за период колебания характеризуется **декрементом затухания** Δ , величина которого находится из выражения:

$$\Delta = \frac{Ae^{-\beta t}}{Ae^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}, \quad (8-12)$$

т.е. декремент затухания равен относительному уменьшению амплитуды за время, равное периоду колебания. Натуральный логарифм Δ называют логарифмическим декрементом затухания δ , т.е. $\delta = \ln \Delta = \beta T$.

§ 8-3. Энергетические соотношения в колебательных процессах.

Для груза, совершающего гармонические колебания, значение кинетической энергии $mv^2/2$ находится прямой подстановкой в величину кинетической энергии выражения для скорости колебательного движения, определяемой выражением (8-5):

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (8-13)$$

Максимальное значение этой энергии, очевидно, равно

$$E_{\text{кин}}^{\text{max}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \quad (8-14)$$

и достигается в момент, когда тело проходит положение равновесия. Пройдя это положение тело продолжает двигаться по инерции и вызывает деформацию пружины. При этом кинетическая энергия движущегося тела переходит в потенциальную энергию деформированной пружины $E_{\text{пот}}$ (см. (6-10))¹²:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (8-15)$$

Максимальное значение этого вида механической энергии равно:

$$E_{\text{пот}}^{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2. \quad (8-16)$$

При незатухающих колебаниях $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, поэтому имеет место сохранение механической энергии: $E_{\text{пот}}^{\text{max}} = E_{\text{кин}}^{\text{max}}$. В этом случае суммарная энергия сохраняет свою величину в любой момент времени (выражения (8-13) и (8-15)):

$$\frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2, \quad (8-17)$$

где учтено, что $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и $m\omega_0^2 = k$.

Если колебания являются затухающими, за каждый период колебаний суммарная энергия колеблющегося тела уменьшается на величину работы против сил трения. В этом случае колеблющееся тело или любая система, в которой происходят колебания, характеризуется так называемым **качеством или добротностью системы** Q , которая определяется как способность системы к превращениям одного вида механической энергии в другой (т.е. кинетической в потенциальную или наоборот). Количественно добротность определяется (с точностью до коэф-

¹² Напомним, что потенциальная энергия определяется неоднозначно, и начало отсчета этой энергии может быть выбрано произвольно.

фициента 2π) как отношение максимальной энергии упругой деформации (или максимальной кинетической энергии колеблющейся системы) к средней величине потерь энергии в системе за период. Известно, что среднее значение любой переменной величины $\langle y \rangle$ за период определяется соотношением :

$$\langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt.$$

Мгновенное значение силы вязкого трения $F_{\text{тр}} = b \frac{dx}{dt} = b\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, тогда

среднее значение работы $\langle A_{\text{тр}} \rangle$ за единицу времени против этой силы равно:

$$\langle A_{\text{тр}} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T b\omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi) dx = \frac{A^2}{T} \int_0^T b\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) dt^{13}.$$

Выразим $\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$ через функцию двойного угла: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ и под-

ставим его в выражение для $\langle A_{\text{тр}} \rangle$:

$$\langle A_{\text{тр}} \rangle = \frac{b\omega_0^2}{2T} A^2 \int_0^T dt + \frac{b\omega_0^2}{2T} A^2 \int_0^T \cos 2(\omega_0 t + \varphi) dt = \frac{b\omega_0^2}{2} A^2, \quad (8-18)$$

поскольку значение второго интеграла в (8-18) равно нулю (среднее значение за период любой гармонической функции равно 0, т.к. эта функция половину периода положительна, а половину - отрицательна).

Очевидно, что за весь период T на преодоление силы трения будет затрачена энергия $W_{\text{потер}} = \langle A_{\text{тр}} \rangle T$, и добротность колебательной системы может быть определена как:

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{упр}}}{W_{\text{потер}}} = 2\pi \frac{(1/2)kA^2}{(1/2)b\omega_0^2 A^2 T} = \omega_0 \frac{k}{b\omega_0^2} = \frac{\sqrt{km}}{b}, \quad (8-19)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Из выражения (8-19) видно, что добротность системы определяется

ее упругими, инерционными и диссипативными¹⁴ свойствами. Можно сказать также, что добротность - это число, показывающее за сколько периодов колебаний вся энергия, запасенная в системе, будет превращена в работу против сил трения, т.е. в тепло.

Как правило, добротность механических систем довольно высока. Здесь уместно вспомнить о звучании музыкальных инструментов: отдельная нота может звучать несколько секунд, хотя частота колебаний составляет несколько киллогерц.

Колебания груза на пружине также могут продолжаться довольно долго, однако в последнем случае существенно заметить, все рассмотренные случаи колебаний касались движения, где изменялась одна координата, в то время как известно, что для полного описания движения точки необходимо задать три координаты. Все

¹³ $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$; $dx = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) dt$

¹⁴ Силы трения иногда называют диссипативными силами, поскольку работа против них в конечном счете превращается в тепло, т.е. рассеивается в пространство.

эти координаты считаются равноправными, поэтому, если по каким-то причинам в системе возникают колебания в двух или трех направлениях, то первоначально запасенная энергия станет равномерно распределяться между всеми направлениями колебаний; другими словами, если груз будет совершать не строго вертикальные колебания вдоль одной прямой, то его колебания затухнут быстрее.

§ 8-4. Колебания математического и физического маятников.

Из школьного курса физики известно, что математический маятник представляет собой точечную массу, подвешенную на длинной невесомой и нерастяжимой нити. На первый взгляд раскачивание такой системы связано с изменением по меньшей мере двух координат сразу так, что для описания такого движения надо записывать второй закон Ньютона (уравнение движения) для каждой из координат в отдельности, а затем искать связь между ними. Однако задача может быть упрощена, если обратить внимание на то, что движение математического маятника происходит при постоянной длине нити подвеса, т.е. его можно рассматривать как частный случай вращательного движения, когда в качестве единственной переменной выбирается угол отклонения от положения равновесия. В этом случае вместо уравнения движения в форме второго закона Ньютона необходимо использовать основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M, \quad (8-20)$$

где I - момент инерции точечной массы относительно точки подвеса, M - момент

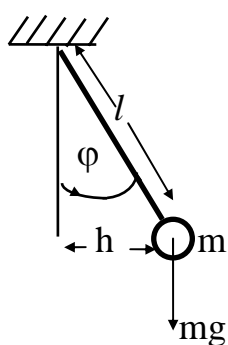


Рис.33. Колебания математического маятника.

всех внешних сил, действующих на эту массу, и $\frac{d\omega}{dt} = \beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ - угловое ускорение массы, которое, в свою очередь, определяется как вторая производная по времени от угла φ отклонения от вертикали (см. рис. 33).

Момент инерции точечной массы m , находящейся на расстоянии l от оси вращения, по определению равен $I = m l^2$, а единственной силой, момент которой относительно оси вращения отличен от нуля, является сила тяжести. Ее момент относительно оси, проходящей через точку подвеса, равен $M = mg h = mg l \sin \varphi$, и уравнение динамики вращательного движения принимает вид:

$$m l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg l \sin \varphi, \quad (8-21)$$

или после сокращения обеих частей на величину ml :

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (8-22)$$

Знак минус в уравнениях (8-21) и (8-22) появился потому, что направление отсчета угла φ взято против часовой стрелки, тогда как момент силы тяжести стремится повернуть маятник по часовой стрелке.

Для малых углов отклонения φ синус угла можно разложить в ряд Тэйлора по малому параметру φ :

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} \frac{df(0)}{dx} x + \frac{1}{2!} \frac{d^2f(0)}{dx^2} x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3f(0)}{dx^3} x^3 + \dots$$

Поскольку $\sin 0 = 0$, то в разложении синуса исчезнут члены, содержащие $f(0)$ и вторую производную $\frac{d^2f(0)}{dx^2}$ и синус угла φ равен:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 + \dots$$

Даже для углов отклонения около 30° , т.е. $0,5$ рад (в математике угол обычно измеряется в радианах; один радиан $\approx 57^\circ$), вторая поправка в разложении синуса дает величину, чуть большую двух процентов, поэтому с достаточной степенью точности функцию синуса можно заменить его аргументом так, что уравнение (8-22) приобретает такой вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \varphi = 0, \quad (8-23)$$

что полностью совпадает с уравнением движения груза на пружине. Поэтому нетрудно прийти к заключению, что частота колебаний математического маятника определится также, как частота собственных колебаний груза на пружине:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (8-24)$$

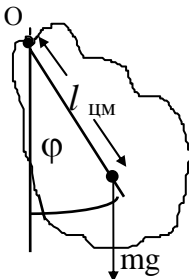


Рис.34. Физический маятник.

Если в качестве маятника используется тело произвольной формы, то уравнение вращательного движения для такого **физического** маятника записывается аналогично

уравнению для математического маятника:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg l_{\text{цм}} \sin \varphi, \quad (8-25)$$

где $l_{\text{цм}}$ обозначает расстояние, на котором расположен центр масс тела от оси вращения (см.рис.34). Однако теперь момент инерции такого маятника требует специального вычисления, которого в рамках нашего курса производиться не будет. Частота собственных колебаний физического маятника равна:

$$\Omega = \sqrt{\frac{mg}{I} l_{\text{цм}}}. \quad (8-26)$$

Лекция 9.

Вынужденные колебания и волны.

§ 9-1. Уравнение вынужденных колебаний.

Вынужденными называются колебания, которые происходят под действием внешней периодической силы. В этом случае частота колебаний не определяется параметрами самой системы, а задается внешним источником. Для груза на пружине уравнение движения может быть получено формальным введением в уравнение (8-8) еще одной - внешней периодической силы $F(t) = F_0 \sin \omega t$:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} + mg - k(x + \xi) + F_0 \sin \omega t ; \quad (9-1)$$

после преобразований и обозначений, аналогичных прошлой лекции, получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t, \quad (9-2)$$

где $f_0 = \frac{F_0}{m}$. Остальные обозначения сохраняют свой смысл. Т.к. груз колеблется с

частотой вынуждающей силы, решение дифференциального уравнения (9-2) может быть записано в следующем виде: $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$. Появление фазового сдвига между колебаниями груза и внешним воздействием связано с определенной инерционностью системы, реагирующей на внешнее воздействие с некоторым опозданием. Однако, для упрощения последующих выкладок, удобнее изменить начало отсчета сдвига фаз: пусть колебания груза происходят по закону $x(t) = A \sin \omega t$, а внешняя сила получает некоторое опережение по фазе, т.е. $f_0 \sin(\omega t - \varphi)$

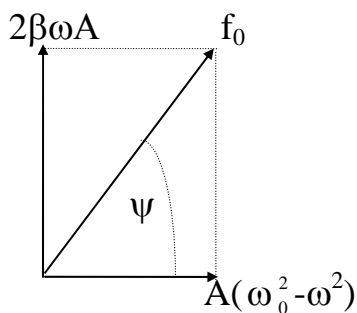
$= f(t)$ или заменяя φ на $(-\psi)$, $f(t) = f_0 \sin(\omega t + \psi)$

Тогда неизвестной величиной в выражении $x(t) = A \sin \omega t$ остается только амплитуда колебаний. Для ее определения используем векторный способ решения уравнения (9-2). Вычислим последовательно первую и вторую производные от $x(t)$ и

подставим эти производные в (9-2): $\frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t = A \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$;

$\frac{d^2 x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t$; после приведения подобных получим:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \sin \omega t + 2\beta \omega A \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = f_0 \sin(\omega t + \psi). \quad (9-3)$$



Вспоминая, что колебания можно представлять в векторном виде, рассмотрим уравнение (9-3) как векторное: два вектора, стоящие в его левой части в сумме дают вектор в правой части (см.рис.35). Из рисунка по теореме Пифагора следует: $4\beta^2 \omega^2 A^2 + A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = f_0^2$. Тогда

Рис.35. Графическое решение уравнения

(9-3).

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \quad (9-4)$$

и

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (9-5)$$

Из найденного выражения для амплитуды вынужденных колебаний (9-4) видно, что величина A зависит от частоты вынуждающего воздействия. Для нахождения экстремального значения этой амплитуды найдем производную знаменателя и приравняем ее к нулю: $4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega - 8\beta^2\omega = 0$, откуда следует, что «экстремальное» или **резонансное** значение частоты определяется как:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (9-6)$$

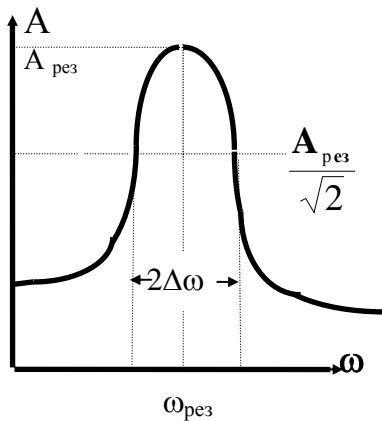


Рис.36. Резонансная кривая.

Если частота внешнего воздействия может изменяться, то в тот момент, когда ее значение совпадает с $\omega_{\text{рез}}$, знаменатель (9-4) становится минимальным, а амплитуда вынужденных колебаний достигает максимальной величины. На практике очень часто наблюдается, что колеблющаяся система обладает слабым затуханием и $\beta \ll \omega_0$. В этом случае $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, т.е. значение резонансной частоты совпадает с собственной частотой системы. Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний до максимума, когда частота внешнего воздействия приближается к собственной частоте колебаний называется **резонансом**. Изменение амплитуды вы-

нужденных колебаний в области частот, близких к резонансной - резонансная кривая - показана на рис.36. Чтобы оценить относительное изменение амплитуды при резонансе, необходимо знать величину амплитуды на двух частотах - на резонансной и на частоте, достаточно далекой от $\omega_{\text{рез}}$. Рассматривая (9-4) нетрудно за-

метить, что такой «далекой» частотой удобно выбрать $\omega = 0$. В этом случае

$$A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}.$$

На резонансной частоте при условии, что $\beta \ll \omega_0$ и $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$, амплитуда колебаний равна

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}, \text{ поэтому отношение выбранных амплитуд } \frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\sqrt{km}}{b} = Q,$$

т.е. амплитуда при резонансе увеличивается в Q раз (Q - добротность системы). При достаточно высокой добротности смещение отдельных частей системы может превышать пределы допустимых деформаций, что приведет к разрушению системы. Особенно опасны такие явления там, где разрушение колеблющейся системы может повлечь за собой гибель людей, - например, на механическом транспорте. Вращение винтов, валов с определенной частотой может вызвать резонансные колебания корпусов самолетов, судов и машин. Чтобы предотвратить

подобные явления, конструктора вынуждены заранее тщательно рассчитывать как собственные частоты транспортных средств, так и возможные частоты, возникающие при различных режимах работы двигателей.

Важной характеристикой резонансной кривой является так называемая ширина кривой. Шириной резонансной кривой называют область частот, близких к резонансной частоте, на которых относительное уменьшение «реакции» системы на внешнее воздействие не превышает 30% (точнее в $1/\sqrt{2}$ раза) относительно « реакции» на резонансной частоте (см. рис.36). Степень задаваемого ослабления носит субъективный характер и связана со слухом человека. Многочисленные измерения показали, что человек « на слух» различает громкости различных источников звука, если их амплитуды отличаются на 30%. Если громкости отличаются на меньшую величину, то человек воспринимает как одинаковые. Другими словами, все звуки при их резонансном усилении, лежащие в области ширины резонансной кривой, будут казаться человеку звуками с одинаковой громкостью. Это важно учитывать при конструировании и изготовлении музыкальных инструментов.

§ 9-2. Волны.

Волной принято называть распространение в пространстве изменений какой-либо физической величины. Изменения величины могут носить как периодический, так и непериодический характер. Для того, чтобы эти изменения могли распространяться в некоторой области пространства, необходимо наличие некоторых условий; в частности, в каждой точке рассматриваемой области физическая величина должна иметь определенное значение (принято говорить, что величина имеет полевой характер). Кроме того должна осуществляться взаимосвязь изменения физической величины в одной точке пространства с изменением этой же величины в соседних точках. Скорость распространения изменения определяется как природой изменяемой величины, так и свойствами **среды**, в которой распространяется это изменение. При этом определенную роль играет направление колебаний в волне. Если направление колебаний совпадает с направлением распространения волны, то такие волны называют **продольными**. Если же колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны,

то такие волны являются **поперечными**. Если относительное изменение величины (т.е. изменение, деленное на саму величину) мало по сравнению с единицей, то такое изменение называют **возмущением** физической величины. Примером

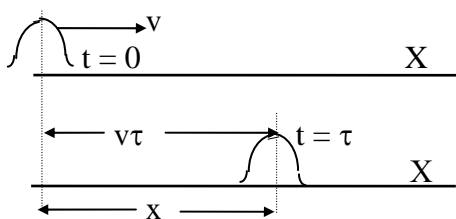


Рис.37. Распространение волны.

распространения возмущения могут служить волны на поверхности воды, возникающие при бросании в воду камешка. Образовавшиеся искажения поверхности воды (см. рис 37) начнут распространяться во все стороны, образуя своеобразные кольцевые структуры. Возникшая волна достигнет некоторой точки, отстоящей на расстояние x от места попадания камня в воду через время $\tau = \frac{x}{v}$, где v - скорость

распространения возмущения по поверхности воды. Пусть в точке попадания камня в воду профиль образовавшегося возмущения является некоторой функцией от времени $f(t)$. Ясно, что в любой точке поверхности, куда доходит образовавшееся возмущение, величина $f(t)$ будет зависеть не только от времени, но также и от расстояния, однако для упрощения предположим, что возмущение сохраняет свою форму вне зависимости от пройденного расстояния. Тогда в любой точке поверхности, отстоящей от начальной точки на расстояние x , профиль возмущения $f(t)$ будет изменяться во времени с некоторым запаздыванием на величину $\tau = x/v$, т.е. аргументом функции $f(t)$ станет величина $(t - x/v)$. Независимость величины возмущения от координаты означает, что $f(t) = f(t - x/v)$. Волны, для которых имеет место последнее равенство называются плоскими. Если в начальной точке возмущение изменяется по гармоническому закону, то такая волна называется **синусоидальной**. Синусоидальная плоская волна записывается в таком виде:

$$f(x, t) = A \sin \omega(t - \frac{x}{v}) = A \sin(\omega t - \frac{\omega x}{v}) = A \sin(\omega t - kx), \quad (9-7)$$

где $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ - так называемое волновое число, а величина $\lambda = vT$ называется длиной волны.

Аргумент синуса в уравнении (9-7) определяет фазу волны $\Phi(x, t)$. Поверхность, соединяющая все точки, фазы которых одинаковы, называется волновой поверхностью или фронтом волны. Если волна плоская, то фронтом волны является плоская поверхность. Волна, распространяющаяся во все стороны от точечного источника, называется сферической; очевидно, что для такой волны волновая поверхность представляет собой сферу. Если на какой-либо поверхности фаза постоянна, т.е. $\Phi(x, t) = \text{const}$, скорость перемещения координаты, для которой фаза постоянна можно определить дифференцируя условие постоянства фазы:

$\frac{d\Phi}{dt} = \omega - k \frac{dx}{dt} = 0$, откуда

$$v_{\text{фаз}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}, \quad (9-8)$$

т.е. скорость распространения волны совпадает со скоростью распространения постоянной фазы. Направление колебаний в распространяющейся волне может совпадать с направлением волны - в этом случае волна называется **продольной**, но может быть и так, что распространение волны происходит в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой совершаются колебания; тогда волны называются **поперечными**. Например, распространение звука - это продольные волны.

Примером поперечных волн могут служить волны на поверхности воды.

§ 9-3. Энергия волны.

Распространение синусоидальной волны в пространстве сопровождается переносом энергии; в этом легко убедиться, вспомнив о разрушительной силе ударной волны при взрывах. Известно также, что волны морского прибоя способны разрушать крепчайшие каменные набережные. При изучении колебаний было установлено, что энергия колебательного движения пропорциональна квадрату ам-

плитуды. Поэтому можно считать, что и в любом выбранном малом объеме пространства в области существования волны сосредоточена колебательная энергия, величина которой также пропорциональна квадрату амплитуды колебаний в волне. Для количественной характеристики энергии колебательного движения в волне обычно относят величину этой энергии к единице объема среды, через которую проходит волна. В этом случае принято говорить о плотности колебательной энергии w . Т.к. волна связана с «переносом» колебаний в пространстве, причем скорость этого «переноса» равна скорости распространения волны \vec{v} , то плотность «перенесенной» энергии $\vec{\mathfrak{S}}$ через единичную площадку в единицу времени равна:

$$\vec{\mathfrak{S}} = v \vec{w}. \quad (9-9)$$

Из (9-9) видно, что величина $\vec{\mathfrak{S}}$ должна быть вектором, направление которого совпадает с направлением скорости. Впервые этот вектор был введен профессором Московского Университета Н.А. Умовым, поэтому вектор $\vec{\mathfrak{S}}$ принято называть вектором Умова.

Также как колебание произвольной формы можно представить в виде суммы гармонических составляющих, так и любую несинусоидальную волну можно представить как сумму синусоидальных волн различных частот. В определенных условиях эти синусоидальные составляющие могут взаимодействовать между собой. В результате этого амплитуды составляющих волн с одними определенными частотами могут уменьшиться, тогда как амплитуда других составляющих возрастает. В целом это приводит к тому, что несинусоидальная волна может существовать довольно долго. Впервые такую волну в английских речных шлюзах наблюдал Д.С. Рассел в 1834 г. Он назвал это явление большой уединенной волной (по- английски - это great solitary wave). Второе слово этого названия теперь вошло в обиход для обозначения устойчивых волновых структур - солитонов.

§ 9-4. Упругие волны в твердом теле.

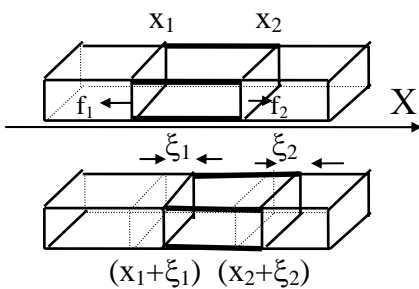


Рис.38. Деформации в стержне.

Пусть имеется однородный стержень. Направим ось X вдоль стержня и выберем два сечения стержня, координаты которых (см.рис.38) равны x_1 и x_2 соответственно так, что между ними оказывается отрезок стержня длиной $l_0 = x_2 - x_1 = \Delta x$. Под действием внешних сил в стержне произойдут упругие деформации¹⁵, так что в новом - деформированном состоянии - выбранные сечения имеют координаты $(x_1 + \xi_1)$ и

$(x_2 + \xi_2)$, т.е. первое сечение сместилось на величину ξ_1 , а второе - на ξ_2 . Длина выбранного отрезка теперь равна $(x_2 + \xi_2) - (x_1 + \xi_1) = l_0 + (\xi_2 - \xi_1) = l_0 + \Delta l$, поэтому величина относительной деформации отрезка равна:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta \xi}{\Delta x}. \quad (9-10)$$

Чтобы написать уравнение движения для выделенного отрезка стержня необходимо вычислить вторую производную смещения по времени. Как видно из выра-

¹⁵ Предполагается, что силы вызывают деформации, которые не выходят за пределы упругости.

жения (9-7), выражение для распространяющейся волны зависит от двух переменных, поэтому вычисление производной от функции $f(x,t)$ должно происходить несколько иначе, чем в случае одной переменной. Производную от функции $f(x,t)$ по одной из двух переменных можно вычислять так же, как и в случае функции одной переменной, считая вторую переменную при этом постоянной, но эта производная называется **частной производной**. Например, если

$f(x,y) = x^5 y^5$, то $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4 y^5$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 5x^5 y^4$ (здесь и далее наклонные ∂ означают знак частной производной).

С учетом этого для бесконечно малого отрезка величина относительной деформации получается формальным предельным переходом к бесконечно малым величинам. Тогда уравнение (9-10) приобретает такой вид:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (9-11)$$

Если по стержню распространяется продольная упругая волна, то в нем действуют попеременно внутренние силы растяжения и сжатия. Выбирая длину отрезка достаточно малой можно добиться, чтобы на его концы действовали одинаковые силы - сжатия или растяжения. Пусть для определенности это будут силы растяжения f_1 и f_2 (см. рис.38). Второй закон Ньютона для элемента длины Δx можно написать, используя теорему о движении центра масс:

$$\Delta m a_{ц.м.} = f_2 - f_1. \quad (9-12)$$

Силы упругого растяжения представляем с помощью закона Гука:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \xi}{\Delta x} = \frac{1}{E S} f, \quad (9-13)$$

где E - модуль упругости (модуль Юнга), S - площадь сечения стержня, а $\frac{\Delta \xi}{\Delta x}$ - величина относительной деформации. Величина $\sigma = f/S$ называется упругим напряжением; масса $\Delta m = \rho S \Delta x$, где ρ - плотность стержня. Если смещение центра масс $\xi_{ц.м.}$, то уравнение (9-12) становится таким:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = f_2 - f_1 = \sigma_2 S - \sigma_1 S.$$

Деля обе части последнего равенства на величину объема $S \Delta x$, получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta x}.$$

При переходе к бесконечно малым величинам последнее уравнение становится уравнением для производных:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{ц.м.}}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (9-14)$$

Правую часть (9-14) выразим через закон Гука (9-13), переходя к бесконечно малым элементам :

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

С учетом последнего соотношения из (9-14) получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_{п.м.}}{\partial t^2} = \mathbf{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \mathbf{x}^2}. \quad (9-15)$$

Соотношение (9-15) называется **волновым уравнением**. Хотя оно получено для частного случая продольных упругих волн, оно имеет достаточно общий вид. Его можно получить сравнением вторых производных любой функции по координате и времени соответственно, если эта функция зависит от аргумента вида $\alpha = t - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{v}}$.

Тогда первые производные функции сложного аргумента равны

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha} \quad \text{соответственно, а}$$

вторые производные равны:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} \right)^2 = \frac{1}{\mathbf{v}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \alpha^2}; \quad (9-16)$$

и

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \right)^2 = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \alpha^2}; \quad (9-17)$$

где

$$\alpha = t - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{v}}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 1; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{x}} = -\frac{1}{\mathbf{v}}. \quad \text{Сравнивая (9-16) и (9-17), получим:}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{1}{\mathbf{v}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2},$$

откуда следует, что скорость распространения продольных упругих волн равна:

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mathbf{E}}{\rho}}.$$

Таким образом решением волнового уравнения являются функции от аргумента $\alpha = t - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{v}}$. Эти функции характеризуют плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x.

Лекция 10.

Элементы гидродинамики.

§ 10-1. Описание движения жидкости и газа.

В отличие от материальных точек, когда для описания их движения задавались координаты этих точек, а затем определялись их скорости и ускорения, для описания движения жидкости применяется несколько иной метод. Развитие этого метода связано с практическими успехами гидро- и аэродинамики. Аналитические формулы, описывающие движения тел в жидкости, очень громоздки, к тому же они содержат большое количество параметров. На практике более эффективным оказался метод моделирования, когда уменьшенные модели самолетов и судов в неподвижном состоянии помещались в аэродинамические трубы или испытательные бассейны. При этом измерялись скорости и ускорения потока жидкости или газа в различных точках испытываемой модели. При таком методе описания движения жидкости или газа измеряется не скорость (ускорение) различных частиц, а скорости и ускорения в некоторых фиксированных точках, через которые проходят отдельные частицы (или отдельные выделенные малые объемы). Если в любой такой выбранной точке значения скорости (или ускорения) не меняются с течением времени, то такое движение называется стационарным.

Обычно различают два типа движения жидкости: ламинарное и турбулентное. При ламинарном течении жидкость перемещается слоями, причем один слой скользит по другому, но слои не перемешиваются между собой, в турбулентном же движении наиболее характерным признаком является наличие вихрей.

Характер движения на первый взгляд зависит от величины скорости жидкости, но в действительности важную роль играют и другие факторы, в частности, вязкость или внутреннее трение. Это свойство органически присуще почти всем реальным жидкостям и является следствием взаимодействия молекул между собой. При ламинарном движении слои жидкости с трением скользят друг по другу. Чем сильнее силы сцепления между частицами жидкости, тем больше различие скоростей двух соседних слоев. Иначе говоря, степень быстроты изменения скорости слоев жидкости при перемещении перпендикулярно ее движению характеризует величину силы трения между слоями. Если же в жидкости движется твердое тело, то слой жидкости, непосредственно к нему прилегающий, движется с ним вместе, следующий слой скользит по первому слою с меньшей скоростью, следующий за вторым слой имеет еще меньшую скорость и т.д. Слой же, граничащий со стенками, ограничивающими поток жидкости, прилипает к стенкам так, что его скорость равна нулю. Величина силы трения при движении тела в жидкости установлена еще Ньютоном, который нашел ее аналитическое выражение:

$$\mathbf{F} = \eta \frac{d\mathbf{v}}{dz} \mathbf{S}, \quad (10-1)$$

где первый сомножитель характеризует вязкость жидкости (коэффициент вязкости), второй отражает быстроту изменения скорости в направлении, перпендикулярном потоку (производная по направлению), и третий представляет площадь соприкосновения жидкости и тела, т.е. зависит от формы тела. Очевидно, что величина силы трения для каждого тела имеет свою определенную величину, но конкретный учет всех особенностей тела связан с серьезными математическими трудностями. Наиболее простой вид силы трения получается при движении шара:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v, \quad (10-2)$$

где r - радиус шара, v - его скорость, η - коэффициент вязкости. Это выражение впервые получено Стоксом и известно как **формула Стокса**.

Степень влияния вязкости на характер движения жидкости можно оценить, если сравнить величину кинетической энергии движущегося тела с работой сил вязкого трения. Эта оценка производится весьма приближенно, с точностью до численных коэффициентов. Для обтекания вязкой жидкостью неподвижного шара

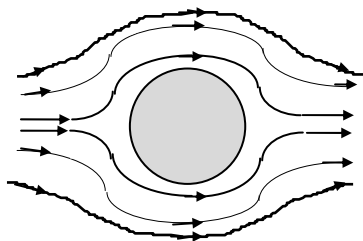


Рис.39. Обтекание шара жидкостью.

(см. рис. 39) величина кинетической энергии жидкости оценивается в предположении, что объем жидкости, где происходит возмущение потока, по своей величине примерно равен объему шара, так что величина кинетической энергии этого объема примерно равна:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} \sim \rho_{\text{ж}} l^3 v^2, \quad (10-3)$$

где l - линейные размеры шара. Для оценки величины работы силы вязкого трения предположим, что площадь поверхности шара $S \sim l^2$, и изменение скорости от значения v до нуля также происходит на расстоянии l , т.е. $\Delta v \sim v$, $\Delta z \sim l$ и

$$F_{\text{тр}} \sim \eta \frac{v}{l} l^2 \sim \eta v l, \quad (10-4)$$

откуда следует, что работа силы трения $A_{\text{тр}}$ равна:

$$A_{\text{тр}} \sim F_{\text{тр}} l \sim \eta v l^2. \quad (10-5)$$

Сравнивая (10-3) и (10-5), нетрудно получить:

$$\frac{E_{\text{кин}}}{A_{\text{тр}}} \sim \frac{\rho_{\text{ж}} l^3 v^2}{\eta v l^2} \sim \frac{\rho_{\text{ж}} v l}{\eta} = \text{Re}. \quad (10-6)$$

Подобные рассуждения можно провести для тела любой формы, поэтому безразмерная величина Re (10-6), получившая название числа Рейнольдса, позволяет оценить влияние вязкости жидкости на характер ее движения. Если число Рейнольдса велико, то трением в жидкости можно пренебречь и считать жидкость **идеальной**. Хотя введение числа Рейнольдса проведено в некотором приближении, тем не менее по его величине можно судить не только о роли трения, но и о характере движения жидкости. Так, например, при $\text{Re} \sim 1000$ движение жидкости в трубах остается ламинарным, но при $\text{Re} \sim 2200$ оно становится турбулентным.

При малых значениях чисел Рейнольдса роль вязкости жидкости достаточно велика и вихревого движения возникнуть не может.

§ 10-2. Уравнение неразрывности.

Как уже отмечалось, при стационарном движении жидкости (или газа) скорость ее частиц не изменяется с течением времени. Для наглядности вводится понятие линии тока, которые представляют собой линии, касательные к которым в любой точке совпадают по направлению с вектором скорости в этой же точке. В случае стационарного движения линии тока неподвижны и совпадают с траекториями частиц жидкости. Кроме того, для облегчения изучения движения жидкости вводится понятие **трубки тока**. Эти трубки образуются так, что линия тока, проходящая через какую-либо точку, лежащую на поверхности трубки тока, целиком лежит на этой поверхности (см. рис.40). При стационарном течении

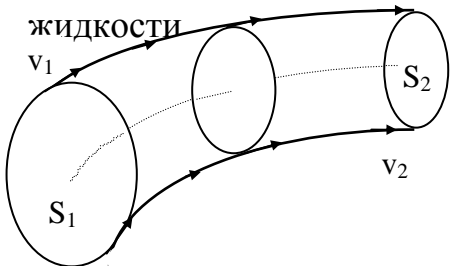


Рис.40. Трубка тока.

стенки трубки тока неподвижны. Жидкость, вошедшая в трубку, в дальнейшем движется все время внутри ее. Поэтому выделенную трубку можно рассматривать независимо от остальной жидкости.

Предположим, что выделенная трубка тока настолько тонка, что в каждой точке ее поперечного сечения величину скорости частиц жидкости можно было бы считать одинаковой. Пусть в сечении S_1 (рис.40) скорость частиц жидкости равна v_1 . За промежуток времени Δt через сечение пройдет объем жидкости $V_1 = v_1 \Delta t S_1$. Если плотность жидкости в этом сечении равна ρ_1 , то через сечение проходит масса $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 v_1 \Delta t S_1$. Аналогично через сечение S_2 за время Δt проходит масса $m_2 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2$. При стационарном движении количество вещества, проходящее через сечения S_1 и S_2 , должно быть одинаковым, т.е. $m_1 = m_2$. Поэтому $\rho_1 v_1 \Delta t S_1 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2$. При несжимаемости жидкости $\rho_1 = \rho_2$, откуда следует, что $v_1 S_1 = v_2 S_2$, или в общем виде

$$v S = \text{const} . \tag{10-7}$$

Выражение (10-7) носит название **уравнения неразрывности**. Примером проявления свойств жидкости, описываемых этим уравнением, может служить течение рек: в узких местах скорость течения возрастает и, наоборот, в широких местах скорость течения становится меньше.

§ 10-3. Уравнение Бернулли и его следствия.

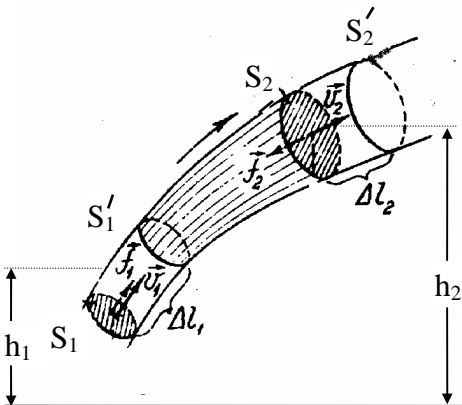


Рис.41. Выделенный элемент трубки тока.

Выделим в трубке тока (см.рис.41) элемент, ограниченный плоскими сечениями S_1 и S_2 . Пусть скорости движения жидкости в этих сечениях равны v_1 и v_2 , а давления p_1 и p_2 соответственно. За время Δt выделенный элемент перемещается в направлении, указанном стрелкой, так, что сечения S_1 и S_2 смещаются на расстояния $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$ и $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$ соответственно, занимая новые положения S'_1 и S'_2 (см. рис.). При перемещении изменяется кинетическая и потенциальная энергии выделенного элемента. По закону сохранения энергии величина этого изменения оп-

ределяется работой сил давления $f_1 = p_1 S_1$ и $f_2 = p_2 S_2$,

которые действуют на плоскости S_1 и S_2 . Как видно из рис., часть элемента между сечениями S'_1 и S_2 остается неподвижной так, что изменение положения выделенного элемента сводится к перемещению отрезка, ограниченного сечениями S_1 и S'_1 в новое положение между плоскостями S_2 и S'_2 . Пусть плотность жидкости в сечении S_1 равна ρ_1 , а в сечении S_2 - ρ_2 . Масса отрезка между сечениями S_1 и S'_1 равна $m_1 = \rho_1 v_1 S_1 \Delta t$, тогда как масса между S_2 и S'_2 равна $m_2 = \rho_2 v_2 S_2 \Delta t$; поэтому кинетическая и потенциальная энергии массы m_1 равны:

$$E_{\text{кин}}^{(1)} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{\rho_1 S_1 v_1^3 \Delta t}{2}; \quad E_{\text{пот}}^{(1)} = m_1 g h_1 = \rho_1 v_1 S_1 \Delta t g h_1. \quad (10-8)$$

Аналогично для массы m_2 :

$$E_{\text{кин}}^{(2)} = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{\rho_2 S_2 v_2^3 \Delta t}{2}; \quad E_{\text{пот}}^{(2)} = m_2 g h_2 = \rho_2 v_2 S_2 \Delta t g h_2; \quad (10-9)$$

где h_1 и h_2 - высоты центров тяжести первого и второго элементов относительно выбранного уровня отсчета потенциальной энергии.

На основании закона сохранения механической энергии можно записать:

$$E_{\text{кин}}^{(2)} + E_{\text{пот}}^{(2)} - E_{\text{кин}}^{(1)} - E_{\text{пот}}^{(1)} = f_1 \Delta l_1 - f_2 \Delta l_2 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (10-10)$$

Работа силы f_2 взята со знаком минус потому, что направление силы и направление перемещения противоположны друг другу.

Подставляя в уравнение (10-10) значения кинетических и потенциальных энергий (10-8) и (10-9), получаем:

$$\frac{\rho_2 S_2 v_2^3 \Delta t}{2} + \rho_2 v_2 S_2 \Delta t g h_2 - \frac{\rho_1 S_1 v_1^3 \Delta t}{2} - \rho_1 v_1 S_1 \Delta t g h_1 = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t, \quad (10-11)$$

откуда после сокращения на величину Δt (с учетом того, что $v_1 S_1 = v_2 S_2$) следует:

$$\frac{\rho_2 v_2^2}{2} + \rho_2 g h_2 + p_2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{2} + \rho_1 g h_1 + p_1, \quad (10-12)$$

или в общем виде:

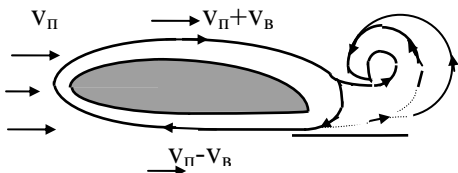
$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.} \quad (10-13)$$

Выражения (10-12) и (10-13) представляют различные формы записи **уравнения Бернулли**, имеющего ряд важных следствий практического характера. Если движение жидкости или газа происходит на постоянной высоте, то уравнение (10-13) упрощается:

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \quad \text{или} \quad \frac{\rho_2 v_2^2}{2} + p_2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{2} + p_1. \quad (10-14)$$

Из этого уравнения следует, что давление внутри трубки тока зависит от скорости: там, где скорость меньше, давление больше, при увеличении скорости потока давление в нем уменьшается. Это утверждение называют принципом Бернулли.

Возникновение подъемной силы крыла.

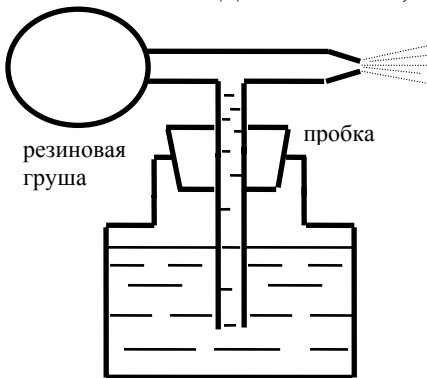


Профиль крыла изображен на рис.42. Воздушный поток, обтекая крыло, образует в области позади его вихрь, направление вращения которого показано на рис. По закону сохранения момента импульса

Рис.42. Обтекание крыла вокруг крыла должен образоваться круговой поток с обратным направлением вращения¹⁶ (см.рис.42). **воздушным потоком.** Если обозначить скорость частиц в вихре вокруг крыла v_v , то, как видно из рис., на верхней части крыла

скорость вихря складывается со скоростью v_n воздушного потока, тогда как под крылом скорость вихря направлена против скорости потока, и они вычитаются. Таким образом получается, что общая скорость воздуха над крылом больше, чем под крылом, и из принципа Бернулли следует, что давление в потоке воздуха под крылом больше, чем в потоке над крылом, т.е. возникает результирующая сила, направленная вверх и известная как **подъемная сила**.

Нечто похожее наблюдается при обтекании неподвижной крыши потоками воздуха при ураганных ветрах: внутри дома воздух неподвижен, тогда как на наружной части крыши его скорость достигает 40 М/с. В этом случае давление воздуха изнутри, которое больше наружного, как бы поднимает крышу вверх. При больших скоростях потока прочности конструкции скрепляющих балок может оказаться недостаточно; в этом случае ветер снесет крышу с дома.



Еще одним примером проявления принципа Бернулли служит пульверизатор, который схематически изображен на рис.43. Если пробка сосуда, содержащего жидкость, плотно прижата, то при сжатии резиновой груши образуется ток воздуха, давление в потоке уменьшается, и под давлением воздуха, находящегося внутри сосуда, жидкость устремляется вверх. Оконечность горизонтальной трубки сужена в виде сопла, что способствует еще большему увеличению скорости потока воздуха, который увлекает за собой капли поднимающейся

Рис.43. Пульверизатор. жидкости. Аналогом пульверизатора является пульт для разбрызгивания краски или побелки. В домашних условиях обычно используется упрощенный вариант этого устройства, где поток воздуха создается обыкновенным пылесосом. Для этого достаточно всасывающий шланг присоединить к выходному отверстию пылесоса.

¹⁶ В реальных жидкостях существование такого потока доказывает эффект Магнуса: если поместить в движущуюся жидкость горизонтально расположенный цилиндр, способный свободно вращаться вокруг своей продольной оси, то цилиндр начинает вращаться так, что направление движения его верхних точек совпадает с направлением потока жидкости.



