Лекция 1 **Кинематика.**

Введение.

Наукой обычно называют попытки систематизировать сумму знаний об окружающем нас материальном мире, о самом человеке и о результатах его деятельности. Сам термин «наука» в настоящее время употребляют во множественном числе, подчеркивая многогранность этого понятия. В этом смысле науки разделяют на гуманитарные и естественные. Общим для всех наук является обязательное использование формальной логики как универсального метода научного мышления.

Физика как отдельная наука изучает наиболее общие законы формирования и развития окружающей нас материи в ее наиболее примитивных формах, которые принято называть неживой природой. Поэтому можно утверждать, что физика является фундаментом всех естественных наук, в частности географии.

В XIX и XX веках физика пережила бурный расцвет, физические знания и физический метод исследования получили большую известность и нашли применения в различных аспектах человеческой деятельности.

Сущность этого метода состоит в том, что в основу критической оценки всех разработанных физических теорий положен эксперимент.

На ранних стадиях развития науки физики свои заключения строили на основе реальных наблюдений различных природных явлений, например, таких как гроза (Б. Франклин и Г.В. Рихман). Позднее человек научился искусственно воспроизводить эти явления в лабораторных условиях – «ставить научные **эксперименты**». Ясно, что ни одна лаборатория не в силах обеспечить полное воспроизведение всех природных условий наблюдений какого-либо явления. Поэтому для правильной постановки того или иного физического эксперимента необходимо провести правильный **анализ** изучаемого явления, выделить его наиболее существенные связи с остальным миром. Таким образом изучение явления или объекта всегда проводится в некотором приближении, когда исследователь сознательно или неосознанно отбрасывает некоторые детали воспроизводимого явления. Получив экспериментальные данные, наблюдатель для их объяснения создает на основе имеющихся у него представлений путем **синтеза** рабочую гипотезу, которая может объяснить не только один, но и целую группу подобных экспериментов. Важно отметить, что осмысление результатов эксперимента идет в некотором упрощенном или, как принято говорить, в модельном представлении, т.е. само явление заменяется его некоторым упрощенным представлением или моделью.

Если разработанные представления оказываются справедливыми для достаточно широкого класса явлений, то принято говорить о возникновении физической теории. Отдельные положения этой теории носят названия физических законов[1], при условии их выполнения для всего класса изученных объектов и явлений.

Важной особенностью физической науки является использование количественных характеристик отдельных свойств физических объектов. Эти характеристики определяются путем **измерений**, и для установления взаимосвязи между

---

[1] В отличие от юридических законов, предписывающих те или иные правила поведения, физические законы носят описательный характер и отражают **реальные** соотношения между различными явлениями природы.

различными физическими параметрами применяется количественная логика, т.е. математика. Математика является мощным средством для аналитического представления физических законов и следствий из них. Любая физическая теория должна быть справедливой для всех явлений природы, в противном случае теория носит лишь частный (ограниченный) характер. Если появляются новые экспериментальные факты, которые не объясняются с точки зрения разработанной теории, то это как раз и указывает на ограниченность теории. В этом случае становится очевидной необходимость построения новой теории, в которой новый экспериментальный материал находит свое естественное объяснение (пример – механика Ньютона и теория относительности Эйнштейна). Здесь важно подчеркнуть тот факт, что критерием оценки справедливости того или иного логического построения выступает **эксперимент**. Именно он является своеобразным «верховным судьей», выносящим свой «приговор» относительно какой-либо теории.

Однако цепочечная связь «эксперимент – гипотеза – закон – теория – эксперимент» не означает, что физическая теория играет лишь описательную роль, и ее призвание состоит только в объяснении проведенных экспериментов. Союз теории и эксперимента носит творческий характер: атомная теория строения вещества получила всеобщее признание задолго до того, когда стало возможно непосредственное наблюдение отдельных атомов.

Курс общей физики, который будет читаться два семестра, рассчитан на формирование физического мировоззрения, создания естественно-научной базы для правильного понимания всех явлений окружающего нас мира.

Традиционно рассмотрение общей физики начинается с раздела «Механика».

§ 1-1. Основные понятия кинематики.

Механическим движением называется изменение положения предмета относительно заданной системы отсчета. Понятие системы отсчета включает в себя тело отсчета и систему координат. Для большинства задач нашего курса достаточно ограничиться прямоугольной системой координат и выбрать в качестве тела отсчета Землю. Простейшим объектом для изучения механического движения может служить материальная точка[2]. Для описания положения материальной точки

относительно выбранной системы отсчета принято использовать векторное представление: положение точки А описывается радиус - вектором $\vec{r}_A$, проведенным из начала координат в точку А. Если точка А движется, то кривая, соединяющая положения точки в последующие моменты времени t_1, t_2 ...t_n (где $t_1 < t_2 .... < t_n$), называется **траекторией** движения. При движении точки конец ее радиус-вектора перемещается вдоль траектории. Изменение радиус - вектора с течением времени

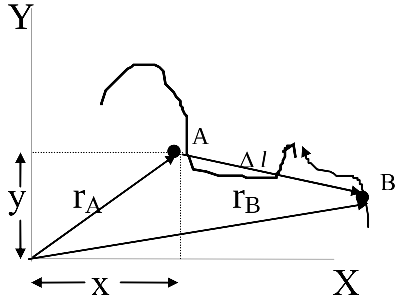


Рис.1.Описание движения точки с помощью радиус-вектора.

[2] Материальной точкой можно считать любой объект, если его геометрические размеры малы по сравнению с характеристическими расстояниями конкретной задачи.

называется **кинематическим законом** движения: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Координаты точки в этом случае также являются функциями времени: x = x(t), y = y(t) (см.рис.1) и z = = z(t), которые можно рассматривать как параметрические уравнения движения. Если за время Δt точка переместилась из положения A в положение B (см.рис.1), то радиус - вектор $\vec{\Delta l}$, проведенный из A в B, называется перемещением точки за время Δt. Из рис. 1 видно, что $\vec{\Delta l} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \Delta \vec{r}$. Для наиболее точного описания движения необходимо выбирать время Δt как можно меньше. В этом случае кривая траектории заменяется ломаной линией. Для практических целей важно знать расстояние, пройденное по траектории. Это расстояние принято называть **путем** S. Очевидно, что длина ломаной линии $\Sigma|\Delta l_i|$, будет приближаться к длине пути, если элементарное перемещение Δl_i заменить бесконечно малым перемещением dl_i .($S = \int_{t_1}^{t_2} dl$)

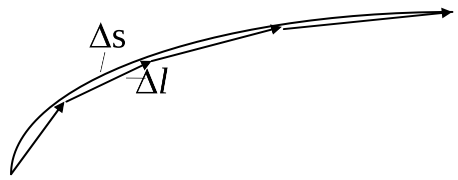


Рис.2. Длина пройденного пути.

Другой известной характеристикой механического движения точки служит скорость. Средняя скорость < v > за промежуток времени Δt определяется как:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{\Delta l}}{\Delta t} . \qquad (1\text{-}1)$$

Ясно, что при таком определении скорости ее значение зависит от выбора величины временного интервала Δt и , как следствие, от величины Δl . Однако при уменьшении величины Δt отношение (1-1) стремится к некоторому пределу, ко-торый принято называть скоростью материальной точки в данный момент времени:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta l}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \qquad (1\text{-}2)$$

поскольку из рис.1 следует, что $\Delta l = \Delta r$. Другими словами можно сказать, что скорость является первой производной радиуса-вектора по времени. Важно отметить, что $S = \sum|\Delta l_i|$, и первая производная пути по времени дает лишь абсолютное значение скорости: $|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$.

Как и любой вектор, вектор скорости можно представить в виде суммы составляющих по координатным осям:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \qquad (1\text{-}3)$$

где i , j , k являются единичными векторами, направленными соответственно вдоль осей X,Y и Z. С другой стороны радиус вектор r также можно представить в виде суммы:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}, \qquad (1\text{-}4)$$

где x,y и z представляют собой проекции радиуса-вектора на направление соответствующих координатных осей . Дифференцируя формулу (1-4) и сравнивая результат дифференцирования с выражением (1- 3), получим:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \text{ и } v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \qquad (1\text{-}5)$$

которые означают, что скорости движения проекции точки вдоль координатных осей равны проекциям вектора скорости на соответствующие оси. Из выражения (1-5) следует, что по известной зависимости координат точки от времени (известному закону движения) x(t), y(t) и z (t) простым дифференцированием можно найти проекции v_x , v_y , v_z вектора скорости на координатные оси, а следовательно и сам вектор скорости в любой момент времени. Величина вектора скорости (его модуль) как и величина любого вектора находится как корень квадратный из суммы квадратов соответствующих проекций:

$$|v| = \sqrt{\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)}. \qquad (1\text{-}6)$$

Несколько сложнее решается обратная задача - нахождение закона движения по заданной зависимости вектора скорости от времени. Например, если известна зависимость от времени проекции скорости v_x (t) , то зависимость координаты x от времени x(t) находится путем интегрирования $x(t) = \int_0^t v_x(t')dt' + x_0$, где x_0 - координата точки в начальный момент времени (при t = 0). Зависимость от времени других координат находится аналогичным способом.

Кроме того, из формулы (1-3) вытекает, что скорость любого движения можно представить как результат сложения трех прямолинейных движений вдоль координатных осей X,Y и Z ,т.е. любое сложное движение можно представить как сумму прямолинейных движений (принцип суперпозиции движений). Примером применения этого принципа может служить вычисление так называемой первой космической скорости, т.е. такой скорости, которою надо сообщить любому телу параллельно земной поверхности, чтобы оно никогда не упало на Землю. В пренебрежении сопротивлением воздуха задача может быть решена следующим образом. Движение тела, брошенного вдоль земной поверхности можно представить как сумму двух движений: равномерного горизонтального движения со скоростью бросания v_I и свободного падения тела к поверхности Земли с ускорением g (ускорением свободного падения). За достаточно малый промежуток времени Δt тело пройдет, двигаясь перпендикулярно земному радиусу, расстояние AC = v_I Δt. (см.рис.3) Если же за это время, находясь в свободном падении, тело опустится на расстояние BC так, что OB = AO =$R_з$, то очевидно, что тело сохранит неизменной свою высоту над поверхностью Земли. Из Δ AOC по теореме Пифагора следует:$AO^2 + AC^2 = OC^2$.В то же время AC = v_I Δt, AO ≈ $R_З$ ($R_З$ - радиус Земли), OC = OB + BC = $R_з + (1/2)g(\Delta t)^2$ (предполагается, что время Δt достаточно мало и проекцией скорости v_I на направление AO можно пренебречь). Заменяя стороны Δ AOC на основании приведенных равенств, имеем:

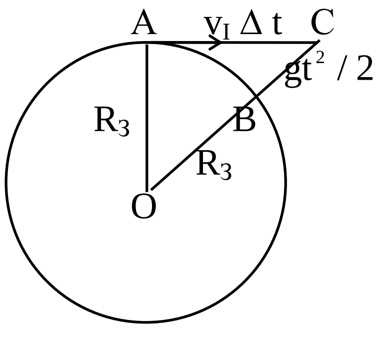


Рис.3. К выводу первой космической скорости.

$$R_3^2 + v_I^2(\Delta t)^2 = R_3^2 + R_3 g(\Delta t)^2 + g^2(\Delta t)^4 / 4 \ . \qquad (1\text{-}7)$$

После приведения подобных членов и сокращения обеих частей этого уравнения на $(\Delta t)^2$ получим: $v_I^2 = R_3 g + g^2(\Delta t)^2 / 4$. При $\Delta t \to 0$ выражение для первой космической скорости приобретает такой вид:

$$v_I = \sqrt{gR_3} \ . \qquad (1\text{-}8)$$

Как видно из вывода выражения для первой космической скорости, любое тело, двигаясь вокруг Земли, находится в свободном падении, но уменьшение высоты полета при свободном падении на Землю в точности компенсируется за счет приращения расстояния до Земли при движении по касательной.

Однако случаи, когда тело сохраняет свою скорость неизменной, крайне редки. Наоборот, в общем случае скорость изменяется как по величине, так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости вводится понятие **ускорения.** Ускорением в данный момент времени называется предел отношения приращения скорости к интервалу времени, за который произошло это приращение:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \ . \qquad (1\text{-}9)$$

Вектор ускорения можно также разложить по координатным осям:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \ . \qquad (1\text{-}10)$$

Модуль вектора ускорения равен:

$$|a| = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} \ . \qquad (1\text{-}11)$$

Прямым дифференцированием аналогично компонентам вектора скорости можно найти, что компоненты вектора ускорения равны:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \qquad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \qquad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \ . \qquad (1\text{-}12)$$

Если известны зависимость от времени вектора ускорения и начальное значение вектора скорости, то вектор скорости в любой последующий момент времени путем интегрирования. Например, для проекции v_x :

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}; \quad dv_x = a_x(t)dt \quad \text{и} \quad v_x(t) = \int_0^t a_x(t')dt' + v_{x0} \, , \qquad (1\text{-}13)$$

где v_{x0} - проекция скорости на ось X в начальный момент времени. Ранее указывалось, что по известной зависимости v (t) можно найти закон движения. Следовательно, по известному ускорению, зная начальные значения положения точки и ее скорости, можно найти ее закон движения. С точки зрения практики вектор ускорения удобнее представлять в виде двух составляющих, одна из которых направлена по касательной к траектории, а другая по нормали, проведенной в точку касания. Пусть за время Δt точка переместилась из A в B, и за это время ее скорость изменилась от v_A до v_B . Для того, чтобы найти изменение Δv перенесем вектор v_B в точку начала вектора v_A. Тогда разность двух векторов v_B - v_A

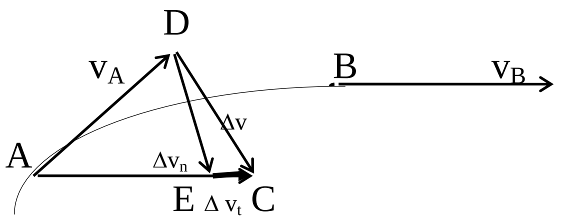


Рис.4. Нормальная и тангенциальная составляющие изменения скорости.

может быть представлена в виде вектора $\vec{\Delta v} = \vec{DC}$. В свою очередь, вектор Δv можно представить тоже как сумму двух составляющих $\vec{\Delta v} = \vec{\Delta v_n} + \vec{\Delta v_t}$, где вектор Δv_t находится как разность AC-AE (AE=AD, AC= v_B), т.е. как разность модулей векторов v_B и v_A. Вектор $\vec{\Delta v_n}$ характеризует изменение направления вектора v_A , т.к. v_A = AE = AD. Треугольник DAE равнобедренный, поэтому при уменьшении интервала времени Δt до нуля ($\Delta t \to 0$) угол DAE также стремится к 0, а $\angle ADE \to 90^0$, и Δv_n оказывается перпендикулярным направлению скорости. В то же время ясно, что направление вектора Δv_t при $\Delta t \to 0$ приближается к направлению касательной в точке A. Поэтому

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t}. \qquad (1\text{- }14)$$

Первое из слагаемых в (1- 14) называют нормальной составляющей ускорения или просто нормальным ускорением, а второе - тангенциальным. Таким образом

$$\vec{a}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}, \qquad (1\text{- }15)$$

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t}. \qquad (1\text{- }16)$$

Модуль полного ускорения определяется следующим выражением:

$$|a| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}. \qquad (1\text{-}17)$$

§ 1 - 2. Кинематика вращательного движения.

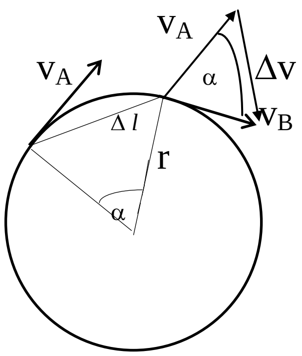


Рис.5. К выводу центростре-мительного ускорения

Частным примером нормального ускорения служит центростремительное ускорение, возникающее при равномерном движении точки по окружности. Если за малый промежуток времени Δt точка успевает по-вернуться на угол α, то как видно из рис.5, между перемещением Δl , радиусом r , приращением Δv и самой скоростью v можно записать следующее соотношение:

$$\frac{\Delta l}{r} = \frac{\Delta v}{v}. \qquad (1\text{-}18)$$

Из этого соотношения приращение скорости Δv равно:

$$\Delta v = v\frac{\Delta \mathbf{l}}{r}. \qquad (1\text{-}19)$$

Деля выражение (1-19) для приращения скорости на промежуток времени Δt, имеем:

$$a_ц = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \qquad (1\text{- }20)$$

Для случая вращательного движения полезными оказываются такие дополнительные кинематические характеристики как угловая скорость и угловое ускорение. Величина угловой скорости ω определяется как отношение угла Δφ, который описывает радиус-вектор точки за время Δt, т.е.

$$\vec{\omega} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} . \qquad (1\text{-}21)$$

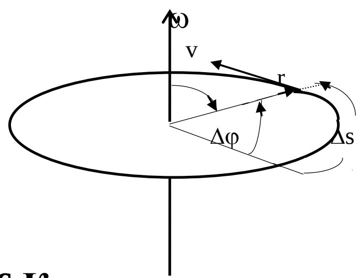


Рис.6.К определению направления угловой скорости.

При этом угловой скорости приписывается определенное направление, которое определяется следующим образом: направление отсчета угла определяется направлением вращения, а направление ω определяется правилом правого буравчика - оно совпадает с движением оси буравчика, когда он вращается в направлении вращения материальной точки (см. рис.6). Вектор углового ускорения β определяется через изменение угловой скорости вращения за время Δt. При этом направление β совпадает с направлением ω, если за время Δt происходит увеличение скорости ω и направление β противоположно вектору ω, если за время Δt угловая скорость уменьшается. Таким образом

$$\vec{\beta} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} . \qquad (1\text{-}22)$$

При вращательном движении между линейной скоростью точки, направленной по касательной к окружности вращения существует определенная взаимосвязь. Действительно

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{[\Delta\vec{\varphi}\vec{r}]}{\Delta t} = \left[\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\vec{r}\right] = [\vec{\omega}\,\vec{r}] , \qquad (1\text{-}23)$$

где квадратные скобки обозначают векторное произведение двух векторов - $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. Как известно, два вектора могут быть перемножены двумя способами - скалярно и векторно. Поскольку при скалярном произведении векторов получается число (скаляр), а скорость по определению - вектор, то остается только векторный способ перемножения векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. Направление векторного произведения также определяется по правилу правого буравчика: первый вектор (в нашем случае - это вектор ω) вращается по кратчайшему направлению к второму вектору (в нашем случае - это радиус - вектор r); движение оси буравчика при таком вращении покажет направление векторного произведения (см. рис.6).

Лекция 2 **Динамика материальной точки**.

§ 2-1. Первый закон Ньютона.

Кинематика устанавливает законы движения материальной точки, но не указывает причины вызвавшие это движение, а также факторы, влияющие на вариации кинематических параметров движения. Законы Ньютона, сформулированные более 300 лет назад [3], явились результатом обобщения большого количества наблюдений и экспериментов. Эти законы имеют фундаментальное значение и в наше время. Первый закон утверждает, что ***существуют такие системы отсчета, в которых всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействия со стороны других тел не заставят его изменить это состояние.*** Свойство тела сохранять свое состояние неизменным называют **инерцией**, а системы отсчета, в которых выполняется этот закон, - **инерциальными.** Физический смысл закона состоит в том, что для механики нет различия между состоянием покоя и равномерного прямолинейного движения. Он подчеркивает относительность движения. Строго говоря,

этот закон является чистой абстракцией, но опыт всего человечества за прошедшие три с лишним века подтверждает его справедливость. Причина изменения состояния тела, т.е. появление ускорения связана с понятием **силы**. Сила - количественная мера воздействия на выбранное нами тело со стороны других тел. Вообще говоря, это воздействие может быть достаточно сложным, но в этом случае его можно разложить на так называемые простые воздействия. Поэтому **силой называют количественную меру простого воздействия на тело со стороны других тел, в во время действия которого тело или его части получают ускорения.** Как показывает опыт, величина полученного ускорения зависит от свойств взаимодействующих тел, от расстояния между ними и от их относительных скоростей. Силу принято измерять (в международной системе единиц СИ) в **Ньютонах (Н)**. На территории нашей страны эта система единиц является Государственным Стандартом с 1977 года. Однако до сих пор существуют метрические внесистемные единицы: грамм, килограмм и тонна. Эти единицы используются при определении веса тела.[4] На практике для измерения величины силы используют динамометр - тарированную (градуированную) пружину, снабженную шкалой.

§ 2-2. Второй закон Ньютона.

Опыт показывает, что одна и та же сила сообщает различным телам разные ускорения. Более массивные тела приобретают меньшие ускорения. Для характеристики способности тел противостоять действию силы используется понятие **массы** . Чем меньше ускорение, которое получает тело, тем больше его масса, т.е. ускорения тел обратно пропорциональны их массам:

---

[3] Трактат И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» был опубликован в 1687 г.

[4] Вес тела - это сила, с которой тело давит на подставку или растягивает нить подвеса. В быту силу в Ньютонах измерять не принято.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} \; . \qquad (2\text{-}1)$$

Приняв какую-либо массу за эталон, с помощью этого соотношения можно измерять любую массу.

Величина ускорения, которое получает тело определенной массы, зависит от величины силы, - чем больше сила F, тем больше ускорение ($a \sim F$) , по другому $a = k F$, где k - коэффициент пропорциональности. С учетом (2-1) имеем:

$$a = \frac{kF}{m} \; . \qquad (2\text{-}2\ а)$$

Выбор коэффициента пропорциональности зависит от выбора системы единиц. В настоящее время во всех существующих системах единиц принято считать $k = 1$, т.е.

$$a = \frac{F}{m} \; . \qquad (2\text{-}2\ б)$$

Ускорение - вектор, масса - величина скалярная (число), поэтому сила тоже вектор, направление которого совпадает с направлением ускорения. Если на тело действует несколько сил, то ускорение тела пропорционально их геометрической сумме:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F_i} \; . \qquad (2\text{-}3)$$

Уравнение (2-3) представляет одну из форм записи второго закона Ньютона. В механике это уравнение принято называть **уравнением движения** . Это уравнение - векторное, и его можно заменить тремя скалярными, проектируя поочередно(2-3) на оси координат X, Y и Z. Второй закон Ньютона может быть сформулирован несколько другим способом с помощью понятия **импульса тела**. Импульсом принято называть величину $\vec{p} = m\vec{v}$, где v - скорость тела. В ньютоновской механике предполагается, что масса тела постоянна и не зависит от скорости, поэтому:

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt} \; . \qquad (2\text{-}4)$$

С учетом (2-4) уравнение (2-3) принимает такой вид :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F_i} \; . \qquad (2\text{-}5)$$

§ 2-3. Третий закон Ньютона.

Понятие силы определено как мера взаимодействия тел, т.е. при рассмотрении движения какого-нибудь тела учитывается только одна сторона этого взаимодействия. Ясно, однако, что все тела надо рассматривать как равноправные, т.е. если второе тело воздействует на первое, то и первое тело воздействует на второе. Третий закон Ньютона устанавливает соотношение между этими воздействиями.

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по величине и направлены пр одной прямой в разные стороны.

Пример: книга лежит на столе; она притягивается к Земле и вследствие этого давит на стол. Однако книга не проваливается к центру Земли, т.к. стол со своей стороны действует на книгу с силой равной по величине силе давления книге на стол. Эта сила со стороны стола носит название реакции опоры. К самой книге приложено две силы: сила притяжения и сила реакции опоры. Они равны по величине и противоположно направлены, т.е. их сумма равна нулю, поэтому книга никуда не двигается.

§ 2-4. Природа механических сил.

Из кинематики известно, что знание величины и направления ускорения позволяет вычислить значения радиуса - вектора материальной точки в любой последующий момент времени, т.е. предсказать [5] положение точки. Законы динамики позволяют сделать это, если известна правая часть уравнений (2-3) или (2-5). Другими словами, нужно уметь определять силы, действующие на тело, положение которого требуется описать. Взаимодействие между макроскопическими телами физика сводит к взаимодействию между элементарными частицами. Таких элементарных частиц в настоящее время известно более сотни. Среди них наиболее популярны электрон, протон и нейтрон. Для характеристики всех частиц вводятся такие понятия как масса покоя, электрический заряд, собственный механический момент (спин), а также *четность, странность, красивость, барионный заряд, цветовой заряд, слабый заряд и т.д.* Установлено, что между элементарными частицами существует четыре фундаментальных взаимодействия: сильное, слабое, электромагнитное и гравитационное. Сравнительные характеристики этих взаимодействий приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Название взаимодействия	Относительная интенсивность	Частица,«переносящая» взаимодействие	Характеристика частицы
Сильное	1	π-мезоны (глюоны)(8 типов)	$m \sim 250\ m_{элект}$ *разнообразные*
Электромагнитное	10^{-2}	фотон	$E= h\nu$
Слабое	10^{-13}	W - частицы Z - частицы	$E \sim 10^2 c^2 m_{протон}$ *гипотетичны*
Гравитацион-Ное	10^{-40}	гравитон	*гипотетичен*

В классической физике считается, что электромагнитное и гравитационное взаимодействия осуществляются посредством **поля**. Поле - это особый вид материи, характерный тем, что каждой точке пространства можно приписать определенное значение поля. Физическое поле - непрерывно. Однако, современная физика, базирующаяся на квантовых представлениях, считает **дискретной** любую

[5] Это не имеет ничего общего с так называемыми «предсказаниями» оккультных «наук».

физическую величину, которая может изменяться только определенными порциями - **квантами**. Она приписывает полям дискретный характер, когда изменение поля рассматривается как излучение или поглощение некой частицы, распространяющейся с конечной скоростью (не больше скорости света **с**). Другими словами, в квантовой физике взаимодействия сводятся к обмену теми или иными частицами, переносящими квант действия. Если квант действия электромагнитного поля
хорошо известен под названием **фотон,** то квант гравитационного взаимодействия
остается по сих пор неоткрытым, хотя он уже получил название **гравитона**.

Строго говоря, силы в механике могут быть сведены к этим двум взаимодействиям, тем более, что два других типа описывают взаимодействия, существующие только в микромире. В частности, сильное взаимодействие может объяснить наличие **ядерных** сил, ответственных за устойчивость атомного ядра. Слабые взаимодействия возникают между микрочастицами, обладающими так называемым слабым зарядом. До 1983 года этот тип взаимодействия рассматривался только теоретиками, но в этом году экспериментально была открыта W^+ - частица с энергией 81 ГэВ (Гига - 10^9, электрон - Вольт - единица измерения энергии, равная $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Джоуля), так что слабое взаимодействие получило опытное подтверждение.

Из таблицы 1 видно, что гравитационные силы являются слабейшими из всех фундаментальных взаимодействий, однако они обладают свойствами аддитивности и достигают значительных величин в космическом масштабе (притяжение Луны, строение Солнечной системы и т.п.). Величина гравитационной силы притяжения двух точечных масс m_1 и m_2 определена Ньютоном и известна как закон всемирного тяготения:

$$F_{грав} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\ , \qquad (2\text{-}6)$$

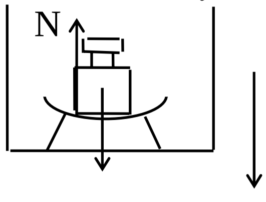
где r - расстояние между массами, а $G = 6{,}67\ 10^{-11}$ Н· м^2/кг^2 - гравитационная постоянная. Чтобы подчеркнуть, что сила - вектор, закон записывают несколько иначе, рассматривая силу, действующую на m_2 со стороны m_1:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\ , \qquad (2\text{-}7)$$

откуда видно направление силы (она направлена вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие массы). Модуль силы притяжения P тела массы m к Земле , которую называют силой тяжести можно записать так:

$$P = G\frac{M_з}{R_з^2}m = gm, \qquad (2\text{-}8)$$

где величина $g = G\frac{M_з}{R_з^2}$ - ускорение свободного падения, $M_з$- масса Земли, а $R_з$ - радиус Земли. Из выражения g видно, что оно не зависит от массы выбранного тела и поэтому одинаково для всех тел в определенной точке земной поверхности.



Важно подчеркнуть различие двух понятий - силы тяжеa

P

Рис.7. К определению веса тела.

сти и веса тела: первая сила существует всегда, когда есть притягивающая масса $M_З$, тогда как вторая, представляющая меру воздействия тела на подставку или нить подвеса, вообще говоря может изменяться. Для пояснения сказанного полезно рассмотреть показания весов, на которых стоит гиря. В неподвижном состоянии на гирю действует две силы - сила тяжести P и сила реакции опоры (весов)N, причем P - N = 0. Если весы движутся вниз с ускорением **a (**см рис.7)**,** то уравнение второго закона Ньютона, записанное в неподвижной системе координат[6], имеет вид:

$$ma = P - N , \qquad (2\text{-}9)$$

откуда

$$N = P - ma = mg - ma = m(g - a). \qquad (2\text{-}10)$$

По третьему закону Ньютона сила реакции опоры N равна и противоположно направлена силе давления гири на весы N', т.е. весу гири ($N = N'$). Поэтому вес гири

$$N' = m (g - a). \qquad (2\text{-}11)$$

Очевидно, что при a = g $N' = 0$, т.е. все свободно падающие тела ничего не весят. Сила тяжести на поверхности Земли не является постоянной по двум причинам: во-первых, Земля, как известно не является идеальным шаром (она сплюснута на полюсах так, что на полюсах g больше, чем на экваторе); во-вторых, вследствие суточного вращения Земли, на все тела на ее поверхности (за исключением географических полюсов) действует центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 r\cos\theta$, направленное в ту же сторону, что и g. Поэтому (ср. с рис.7) вес тел будет меньше там, где радиус вращения больше, т.е. на экваторе тела имеют наименьший вес.

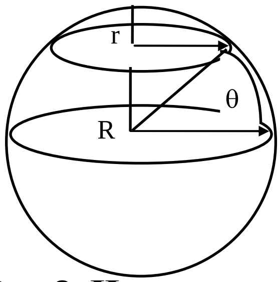


Рис.8. Изменение радиуса вращения.

Кроме гравитационных сил в механике рассматриваются упругие силы и силы трения, которые обусловлены электрическими силами. Силы упругости обусловлены деформациями. Деформации связаны с изменением взаимного расположения молекул, образующих рассматриваемое тело, причем силы возникают лишь тогда, когда деформации носят упругий характер. В этом случае справедлив закон Гука так, что

$$F_{упр} = -k\xi , \qquad (2\text{-}12)$$ д

где ξ обозначает величину упругой деформации, а к - коэффициент пропорциональности, зависимый от свойств деформируемого тела и вида деформации. Частным примером проявления упругих сил служат силы реакции опор, направление которых считается всегда нормальным (перпендикулярным) к деформируемой поверхности. Другим примером действия упругих сил могут служить так называемые силы связи (силы натяжения).

Рассмотрение сил трения можно ограничить двумя примерами : силами сухого и силами вязкого трения[7]. Сила сухого трения скольжения известна из

---

[6] Положительное направление оси координат удобно направить **вниз**.

[7] Для упрощения изложения материала силы трения **качения** не рассматриваются .

школьного курса физики: $F_{тр} = -\mu N$, где μ - коэффициент трения, характеризующий свойства взаимодействующих поверхностей, а N - так называемая сила нормального давления . В отличие от сил вязкого трения эта сила не зависит от скорости движения тела. Сила вязкого трения, напротив, зависит от величины скорости, причем степень зависимости меняется по мере возрастания скорости. Для сравнительно небольших скоростей она может быть представлена в таком виде:

$$\vec{F}_{вяз} = -b\vec{v} = -b\frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (2\text{-}13)$$

Величина коэффициента b зависит как от свойств самого тела, которое движется в вязкой среде, так и от свойств среды. Иногда эту силу трения удобнее представлять в таком виде:

$$F_{вяз} = -\kappa S\frac{dv}{dz}, \qquad (2\text{-}14)$$

где S - площадь соприкосновения тела со средой, κ - коэффициент внутреннего трения среды, а величина производной, входящей в выражение для силы, носит название **градиента скорости,** описывающего быстроту изменения скорости слоев среды, увлекаемых телом, в направлении, перпендикулярном направлению скорости тела.

Практически важное значение имеет ***сила трения покоя*** , возникающая между соприкасающимися телами. Максимальную величину этой силы обычно оценивают по формуле для силы трения скольжения, хотя в действительности они несколько отличаются друг от друга.

§ 2- 5. Динамика вращательного движения материальной точки.

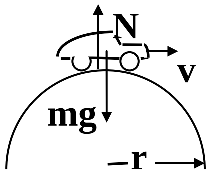


Рис.9. Силы при вращательном движении.

Специфика такого движения состоит в том, что для его описания приходится прибегать к некоторым ухищрениям для выбора системы отсчета, в которых можно записать уравнение движения. Если выбирать обычную неподвижную систему координат, то направления скоростей и ускорения точки будут ежесекундно изменяться относительно координатных осей, что не совсем удобно. Поэтому оперируют с так называемой ***следящей*** системой координат, т.е. с такой системой, начало которой неподвижно и совпадает в выбранный момент времени с движущейся материальной точкой, а направления ее осей совпадает с направлением скорости тела в этот момент времени и с направлением радиуса вращения, проведенного в точку, где расположено тело в этот же момент времени. Важно отметить, что выбранная таким образом система отсчета является неподвижной относительно инерциальной системы отсчета (например, Земли), и в ней справедливы законы Ньютона.

Рассмотрим в качестве примера движение автомашины по выпуклому мосту, радиус которого r (см. рис.9) .Направим одну из осей следящей системы координат к центру моста, а другую - вдоль направления скорости v. Уравнение движения в этом случае имеет вид (в проекции на вертикальную ось):

$$ma_ц = mg - N, \qquad (2\text{-}15)$$

где через N обозначена сила реакции моста, а mg - сила тяжести. Решая это уравнение относительно N, получаем :

$$N = mg - ma_ц = m(g - \frac{v^2}{r}), \qquad (2\text{-}16)$$

откуда следует, что при $\frac{v^2}{r} = g$ сила реакции моста будет равна 0 . Но это означает, что автомашина в этот момент времени не оказывает никакого давления на мост, т.е. она находится в состоянии невесомости.

Лекция 3 **Динамика системы материальных точек.**

§ 3 - 1. Центр масс системы материальных точек.

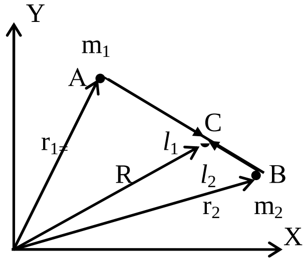


Рис.10. К определению центра масс.

Центром масс двух материальных точек А и В с массами m_1 и m_2 соответственно называется точка С, лежащая на отрезке, соединяющем А и В, на расстояниях l_1 и l_2 от А и В, обратно пропорциональных массам точек (см. рис.10.), т.е.

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1} . \qquad (3\text{-}1)$$

Если положения точек А и В задаются радиус-векторами r_1 и r_2 , то положение центра масс определяется радиусом - вектором R. Из рис.10 следует, что

$$\vec{R} = \vec{r_1} + \vec{l_1} \quad \text{и} \quad \vec{R} = \vec{r_2} + \vec{l_2}, \qquad (3\text{-}2)$$

Умножая первое из этих уравнений на m_1, а второе - на m_2 и складывая их, получим:

$$(m_1 + m_2)\vec{R} = m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + m_1\vec{l_1} + m_2\vec{l_2}. \qquad (3\text{-}3)$$

Из рис.10 и равенства (3-1) следует, что $m_2 l_2 = - m_1 l_1$. С учетом этого соотношения из выражения (3-3) можно определить значение радиуса - вектора R:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1 + m_2} . \qquad (3\text{-}4)$$

Обобщая это выражение для произвольного числа материальных точек, получим:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} , \qquad (3\text{-}5)$$

где $\sum_{i=1}^{n} m_i = M$ - полная масса системы точек.

Скорость центра масс такой системы определяется дифференцированием (3-5):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r_i}}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} . \qquad (3\text{-}6)$$

Величины $\vec{m_i v_i}$ представляют собой импульсы отдельных точек, поэтому урав-нение (3-6) можно переписать в следующем виде:

$$M\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p_i} = \vec{P}, \qquad (3\text{-}7)$$

где через $\vec{P}$ обозначен суммарный импульс системы. Дифференцируя (3-7), находим выражение для ускорения центра масс системы $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}}{dt} = M\vec{A} . \qquad (3\text{-}8)$$

§ 3 -2 Закон изменения импульса системы материальных точек.

Для простоты рассмотрим движение системы, состоящей из трех точек, на каждую из которых действуют внутренние силы f_{ik} и внешние - F_i , где индекс i представляет номер точки. Уравнения движения для каждой точки имеют вид:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{F}_1;$$
$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{F}_2; \qquad (3\text{-}9)$$
$$\frac{d\vec{p}_3}{dt} = \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32} + \vec{F}_3;$$

Складывая эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}(p_1 + p_2 + p_3) = f_{12} + f_{13} + f_{21} + f_{23} + f_{31} + f_{32} + F_1 + F_2 + F_3 \qquad (3\text{-}10)$$

По третьему закону Ньютона внутренние силы попарно равны по величине и противоположны по направлению (например, $f_{12} = -f_{21}$). Потому сумма всех внутренних сил равна нулю, и

$$\frac{dP}{dt} = F_1 + F_2 + F_3, \qquad (3\text{-}11)$$

где через P обозначен суммарный импульс системы. Обобщая (3-11) для любого числа материальных точек, можно записать следующее выражение:

$$\frac{dP}{dt} = \sum_i F_i, \qquad (3\text{-}12)$$

которое принято называть законом изменения импульса системы материальных точек. Как видно из этого выражения, изменение суммарного импульса определяется равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему. Если же эта равнодействующая равна нулю (или на систему не действуют никакие внешние силы), то суммарный импульс системы остается постоянным. Это следствие уравнения (3-12) называется **законом сохранения импульса**. Другим следствием рассмотренного закона изменения импульса служит **теорема о движении центра масс,** которая утверждает, что **центр масс системы материальных точек под действием внешних сил движется как материальная точка суммарной массы, к которой приложены все внешние силы,** и записывается в таком виде:

$$MA = \frac{dP}{dt} = \sum_i F_i. \qquad (3\text{-}13)$$

Доказательство этого утверждения следует из сравнения определения ускорения центра масс(3-8) и выражения (3-13).

Примерами закона сохранения импульса могут служить отдача при стрельбе из огнестрельного оружия, реактивное движение, перемещение осьминогов и т.п.

Лекция 4. Динамика твердого тела.

§ 4-1. Кинематические соотношения.

Твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, жестко скрепленных друг с другом. Отсутствие такого закрепления существенно затруднило бы описание движения всего конгломерата точек. Для полного описания движения одной точки необходимо знать ее три координаты, поэтому для N точек число необходимых координат , а следовательно, и число уравнений для их определения составило бы 3N. Так как число N может быть как угодно большим, то возможности строгого решения системы из 3N уравнений весьма ограничены. Кроме того характер движения тела как целого может быть различным. Обычно различают поступательное, вращательное и плоское движения. При поступательном движении все точки тела движутся по параллельным траекториям, так что для описания движения тела в целом достаточно знать закон движения одной точки. В частности, такой точкой может служить центр масс твердого тела. В этом случае задача описания движения тела решается с помощью теоремы о движении центра масс. При вращательном движении все точки тела описывают концентрические окружности, центры которых лежат на одной оси. Скорости точек на любой из окружностей связаны с радиусами этих окружностей и угловой скоростью вращения: $\vec{v}_i = [\vec{\omega}\,\vec{r}_i]$. Так как твердое тело при вращении сохраняет свою форму, радиусы вращения остаются постоянными и

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}\vec{r}_i\right] = [\vec{\beta}\vec{r}_i]. \qquad (4\text{-}1)$$

§ 4-2. Определение момента силы.

Для описания динамики вращательного движения твердого тела необходимо ввести понятие момента силы. При этом надо различать понятия момента силы относительно точки и относительно оси. Если сила f приложена к материальной точке A(см. рис.11),то моментом силы M относительно произвольной точки O называется векторное произведение радиуса-вектора r, проведенного из точки O к точке A, и вектора силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}\,\vec{f}\,]. \qquad (4\text{-}2)$$

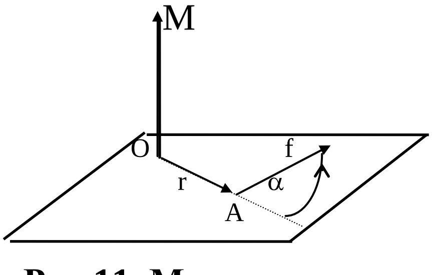
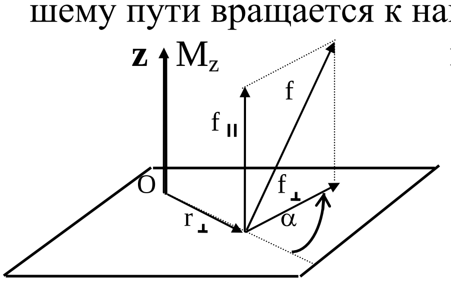


Рис.11. Момент силы относительно точки.

Модуль векторного произведения $|M| = r\,f\sin\alpha$, а направление вектора M определяется правилом правого буравчика: направление первого вектора r по кратчайшему пути вращается к направлению второго вектора f, а движение оси буравчика при этом вращении показывает направление вектора M.



Моментом силы относительно произвольной оси z называется векторное произведение радиуса-вектора $r_\perp$ и составляющей $f_\perp$ силы f , приложенной в точке A:

$\perp\ \perp$

$\perp$

A

$$M = [\, r \;\; f \,]\,, \qquad (4\text{-}3)$$

Рис.12. Момент силы относительно оси.

где составляющая f представляет собой проекцию силы f на плоскость, перпендикулярную оси z и проходящую через точку A , a r - радиус- вектор точки A, лежащий в этой плоскости .

§ 4-3. Основное уравнение динамики вращательного движения.

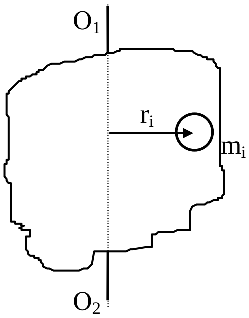


Рис.13 Вращение твердого тела.

Пусть имеется твердое тело произвольной формы (см. рис 13), которое может вращаться вокруг оси O_1O_2 . Разбивая тело на малые элементы, можно заметить, что все они вращаются вокруг оси O_1O_2 в плоскостях, перпендикулярных оси вращения с одинаковой угловой скоростью ω. Движение каждого из отдельных элементов малой массы m описывается вторым законом Ньютона. Для i -го элемента имеем:

$$m_i \vec{a}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{f}_{i1} + \vec{f}_{i2} + \; ..... + \vec{f}_{iN} + \vec{F}_i\,, \qquad (4\text{-}4)$$

где $\vec{f}_{ik}$ (k = 1,2, ...N) представляют собой внутренние силы взаимодействия всех элементов с выбранным, а $\vec{F}_i$ - равнодействующая всех внешних сил, действующих на i - элемент. Скорость v_i каждого элемента вообще говоря может меняться как угодно, но поскольку тело является твердым, то смещения точек в направлении радиусов вращения можно не рассматривать. Поэтому спроектируем уравнение (4-4) на направление касательной и умножим обе части уравнения на r_i :

$$r_i(\, m_i\, a_i\,)_t = r_i(\, m_i \frac{dv_i}{dt})_t = r_i(f_{i1})_t + r_i(f_{i2})_t + \; ..... + r_i(f_{iN})_t + r_i(F_i)_t\,. \qquad (4\text{-}4a)$$

В правой части получившегося уравнения произведения типа $r_i(f_{i1})_t$ представляют собой (согласно (4-3)) моменты внутренних сил относительно оси вращения, т.к. r_i и $(f_{\,i})_t$ взаимно перпендикулярны. Аналогично произведения $r_i(F_i)_t$ являются моментами внешних сил, действующих на i-элемент. Просуммируем уравнения движения по всем элементам, на которые было разбито тело.

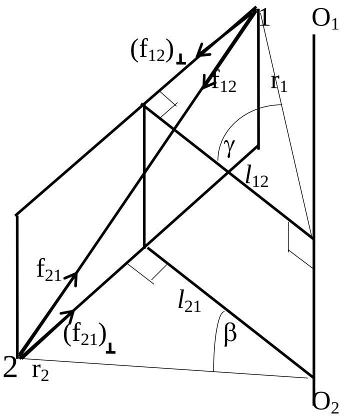


Рис.14. Компенсация моментов внутренних сил .

Сумму моментов внутренних сил можно разбить по парам слагаемых, обязанных своим возникновением взаимодействию двух элементов тела между собой. На рис.14 представлена пара, состоящая из 1-го и 2-го элементов. Проводя плоскость через линию, соединяющую эти элементы, параллельно оси вращения O_1O_2, нетрудно заметить, что моменты сил взаимодействия этих элементов равны по величине и противоположно направлены, т.е. они компенсируют друг друга. Действительно, силы f_{12} и f_{21} равны между собой; равны и их составляющие $(f_{12})_\perp = (f_{21})_\perp$. Кроме того равны и их плечи [8]($l_{12} = l_{21}$), т. к. каждое из них перпендикулярно проведенной плоскости. Поэтому момен-

---

[8] Плечом силы называют величину r sinα (см. выражение (4-2) и обозначения рис.11.). Оно является перпендикуляром, опущенным на **линию действия** силы.

ты сил $M_1 = (f_{12})_\perp r_1 \sin(90^0 - \gamma) = (f_{12})_\perp l_{12}$ и $M_2 = (f_{21})_\perp r_2 \sin(90^0 - \beta) = (f_{21})_\perp l_{21}$ равны и противоположно направлены. На основании этого можно сделать вывод, что при сложении всех моментов внутренних сил они попарно уничтожатся. Суммарный момент всех внешних сил обозначим $\Sigma \vec{M}_i$, где $\vec{M}_i = [\vec{r}_i \vec{F}_i]$.

Левая часть уравнения (4-4а) с учетом (3 -7) представится в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{N} r_i m_i a_i = \sum_{i=1}^{N} r_i \, m_i \left[\frac{d\omega}{dt} r_i\right] = \frac{d\omega}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = I \frac{d\omega}{dt}, \qquad (4\text{-}5)$$

где величину $I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$ принято называть **моментом инерции твердого тела относительно заданной оси.** Эта величина характеризует распределение массы тела относительно определенной оси. Как следует из определения момента инерции - это величина аддитивная. Момент инерции тела складывается из моментов инерции его отдельных элементов, которые можно рассматривать как материальные точки, т.е.

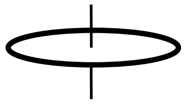
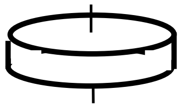
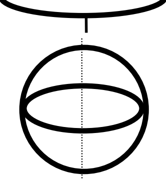
$$I = \sum_{i=1}^{N} j_i \text{, где } j_i = m_i r_i^2 \text{ - момент инерции материальной точки.}$$

При практическом вычислении моментов инерции вместо суммирования используется интегрирование (суммирование бесконечно малых величин). Если ось, относительно которой вычисляется момент инерции, проходит через центр симметрии тела, то вычисление такого интеграла представляет сравнительно несложную задачу, но в общем случае задачу решить трудно. Для упрощения вычислений полезной оказывается теорема о параллельном переносе осей инерции (теорема Гюйгенса - Штейнера), формулировка которой гласит, что *момент инерции относительно любой оси равен сумме момента инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями*, т.е.

$$I_{произ} = I_{цм} + m d^2 . \qquad (4\text{-}6)$$

Для некоторых тел правильной формы значение моментов инерции относительно осей, проходящих через центр их симметрии приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Форма тела	Расположение оси	Величина момента инерции
Обруч		$m R^2$
Цилиндр		$\frac{1}{2} mR^2$
Шар		$\frac{2}{5} mR^2$

Примечание: m- масса тела, R - его радиус

На основании изложенного уравнение (4-4а) с учетом (4-5) приводится к виду:

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \ , \qquad (4\text{-}7)$$

которое называется уравнением динамики вращательного движения твердого тела или уравнением моментов. Дело в том, что левую часть этого уравнения можно представить по другому, т.к. по аналогии с правой частью величину

$$[\vec{r}_i\vec{a}_i m_i]=[\vec{r}_i \frac{d(m_i\vec{v}_i)}{dt}] = [\vec{r}_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}] = \frac{d}{dt}[\vec{r}_i m_i \vec{v}_i]$$

называют изменением момента импульса (радиус r_i внесен под знак дифференцирования, т.к. все точки вращаются по окружностям постоянного радиуса) . Если обозначить $[\vec{r}_i\ m_i\ \vec{v}_i] = [\vec{r}_i\ \vec{p}_i] = \vec{L}_i$, а сумму $\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \vec{L}$, то уравнение (4-7) можно записать так:

$$\frac{\mathbf{d\vec{L}}}{\mathbf{dt}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \vec{\mathbf{M}}_{\mathbf{i}} \ . \qquad (4\text{-}8)$$

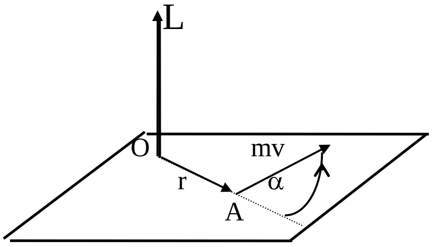


Рис.15.Момент импульса материальной точки.

Рис.15 поясняет определение момента импульса точечной массы относительно точки O, который вычисляется также как момент силы $[\vec{r}_i\ m_i\ \vec{v}_i] = [\vec{r}_i\ \vec{p}_i] = \vec{L}_i$. Направление момента импульса определяется правилом правого буравчика - вектор $\vec{r}$ вращается по кратчайшему пути к вектору $m\vec{v}$, а направление движения оси буравчика указывает направление вектора $\vec{L}$. Момент импульса относительно оси также определяется аналогично моменту силы относительно оси:

$$\vec{L} = [\ \vec{r}_\perp \vec{p}_\perp\ ] \ , \qquad (4\text{-}9)$$

где значения $r_\perp$ и $p_\perp$ соответствуют обозначениям рис.12 (с заменой f на p). Для вращательного движения точки $L = [r\ mv] = [r\ m\omega r] = \omega\ mr^2 = \omega\ I_i$. Для твердого тела

$$L = \omega I \ . \qquad (4\text{-}10)$$

§ 4-4. Закон сохранения момента импульса.

Если правая часть уравнения (4-8) оказывается по каким - либо равной нулю - суммарный момент сил равен нулю, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ и $\vec{L}$ = const. Это случается, если система замкнута, т.е. внешние силы вообще не действуют, или если моменты внешних сил компенсируют друг друга. Наконец, если внешние силы оказываются центральными - линии действия всех сил пересекаются в одной точке. Весьма интересным представляется случай, когда механический момент импульса при вращении тела имеет достаточно большую величину (по сравнению с моментом внешних сил). Наиболее ярким примером этого служит **гироскоп** (см. рис 16).

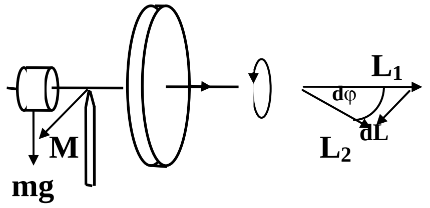


Рис.16 Прецессия гироскопа.

Гироскопом принято называть достаточно массивное тело, быстро вращающееся вокруг оси симметрии. Гироскоп закрепляют в одной точке с помощью специального устройства - *карданова подвеса* . Если на гироскоп действуют внешние силы (груз mg на рис.), то ось гироскопа начинает смещаться под воздействием **момента силы** (см. (4-8)), т.е. изменение момента импульса совпадает с направление M. За малый промежуток времени dt ось гироскопа повернется на угол dφ так, что изменение момента импульса $dL = L_1 - L_2 = Ld\varphi$. В то же время из уравнения (4-8) следует $dL = M\,dt$, или $Ld\varphi = M\,dt$, откуда можно придти к выводу, что гироскоп начинает вращаться в плоскости, перпендикулярной плоскости рисунка с частотой, которая называется **частотой прецессии.**

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}. \qquad (4\text{-}11)$$

Если моменты внешних сил малы по сравнению с моментом импульса вращающегося тела, то частота прецессии мала, и тело сохраняет ориентацию оси вращения в пространстве (пример - жонглирование предметами в цирке).