

**Федеральное агентство по образованию**

Пермский государственный технический университет  
Кафедра прикладной физики

УДК 531  
0-752

Утверждено  
на заседании кафедры  
31 мая 2005 года

## **Электричество и магнетизм**

Конспект лекций по общей физике

**Пермь 2005**

Конспект лекций по общей физике для студентов электротехнического факультета ПГТУ. Раздел 3: Электричество и магнетизм. Составители доценты кафедры прикладной физики: Кротов Л. Н. , Шарифулин А.Н.– Пермь: Изд-во ПГТУ, 2005.

<b>ЭЛЕКТРОСТАТИКА, ЕЕ ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД И ЕГО СВОЙСТВА</b>	<b>5</b>
Закон Кулона. Характер сил электростатического взаимодействия точечных зарядов и основные характеристики и уравнения электростатического поля	5
Методы расчета основных характеристик электростатического поля	9
Применение теоремы Остроградского-Гаусса к расчету характеристик ЭСП симметричных, равномерно заряженных тел.	10
<b>ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭСП С ДИЭЛЕКТРИКАМИ. ПОЛЯРНЫЕ И НЕПОЛЯРНЫЕ ДИЭЛЕКТРИКИ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ. ПОЛЯРИЗОВАННОСТЬ (ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ). ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ</b>	<b>16</b>
Теорема Остроградского - Гаусса для диэлектрика. Граничные условия.	18
Взаимодействие ЭСП с проводящими средами	19
<b>ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК</b>	<b>22</b>
Основные характеристики и законы постоянного тока	22
Сторонние силы. Электродвижущая сила. Закон Ома для неоднородного участка цепи и для замкнутой цепи. ЭДС, напряжение и разность потенциалов	25
Электрический ток в газах. Вольтамперная характеристика (ВАХ) газового разряда и ее физический анализ. Виды электрического разряда в газе.	27
<b>МАГНИТОСТАТИКА, ЕЕ ПРЕДМЕТ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ, ЗНАЧИМОСТЬ И МЕСТО В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ</b>	<b>28</b>
Методы расчета характеристик МСП. Решение основной прямой задачи магнитостатики.	30
Силовые проявления МСП. Действие МСП на проводник и контур с током и на движущуюся заряженную частицу.	33
Сила Лоренца	33
Взаимодействие проводников с током.	35
Контур (рамка) с током в однородном внешнем МСП	35
Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле	36
Энергия и объемная плотность энергии магнитного поля	36
<b>НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПИ С ИНДУКТИВНОСТЬЮ. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ</b>	<b>38</b>
Затухающие колебания	39
Вынужденные колебания. Резонанс.	41
<b>МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ</b>	<b>44</b>
Магнитные моменты атомов. Типы магнетиков. Особенности диа - и парамагнетизма.	44
Ферромагнетики. Домены и спиновая природа ферромагнетизма. Кривая намагничивания и магнитный гистерезис. Точка Кюри.	46
<b>НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИНДУКТИВНОСТЬ.</b>	<b>47</b>
<b>УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА</b>	<b>48</b>
<b>ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ</b>	<b>50</b>
<b>ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ</b>	<b>52</b>

Физика изучает наиболее общие законы окружающего нас материального мира - неживой природы. Физики путем экспериментов и с помощью теоретических исследований установили, что в неживой природе существует два взаимосвязанных вида (состояния) материи - **вещество и поле. Вещество (тела, частицы) - дискретно**, локализовано в пространстве, а **поле - непрерывно распределено в пространстве**, не обладает ни формой, ни размерами.

Вещество способно порождать и поглощать поле, которое, в свою очередь, выступает в роли переносчика взаимодействия, осуществляющего перенос и обмен движением между взаимодействующими телами.

**Физическое поле** подразделяется на четыре фундаментальных вида (состояния): гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. Наиболее освоенным в человеческой практике, в современной технике (особенно электро- и радиотехнике, электронике) является электромагнитное взаимодействие и его переносчик - электромагнитное поле. Оно является, например, причиной таких сил, как силы упругости и натяжения, силы трения и сопротивления.

В электромагнитном взаимодействии участвуют тела, обладающие электрическим зарядом и/или магнитным моментом. Такие тела создают в окружающем пространстве электромагнитное поле, которое проявляет себя в силовом действии (т. е. в изменении состояний движения) на другие тела, обладающие электрическим зарядом и/или магнитным моментом.

**Электрический заряд (и магнитный момент) являются характеристикой тел, определяющей меру интенсивности участия их в электромагнитном взаимодействии.**

Электромагнитное взаимодействие и поле являются универсальными, т. к. все три элементарные частицы атомов вещества (электрон, протон и нейтрон) обладают магнитным моментом, а электрон и протон - и электрическим зарядом.

В зависимости от состояния движения (скорости  $v$ ) электрически заряженных тел, создаваемое ими электромагнитное поле может существовать в следующих конкретных видах (состояниях):

- 1) статическом (электростатическом) - при  $v = 0$ ;
- 2) стационарном (электрическом и магнитном) - при  $v = \text{const} \neq 0$ ;
- 3) нестационарном (едином электромагнитном) - при  $v = \text{var} (v \neq \text{const})$ .

В статическом и стационарном состояниях электромагнитное поле расщепляется на обособленные электростатическое и магнитостатическое поля. В нестационарном состоянии электрическое и магнитное поля взаимно увязываются в единое электромагнитное поле, которое может существовать либо в связанном, с породившими его источниками состоянии, например, в виде электромагнитных колебаний, либо в свободном состоянии, в виде распространяющихся в пространстве со скоростью света электромагнитных волн.

В классической (не квантовой) теории электромагнитного поля - электродинамике Максвелла (1864 г) наиболее общие уравнения электромагнитного поля - уравнения Максвелла описывают нестационарное электромагнитное поле и содержат в себе как частный случай уравнения для стационарных электрического и магнитного полей и для электростатического поля.

В курсе общей физики электромагнитное поля принято изучать постепенно от простейших состояний - статического и стационарного - к более общему и сложному - к нестационарному состоянию.

К общим основным задачам учения об электромагнитном поле относят:

1. Описание электромагнитного поля, т. е., задание его основных характеристик (задание состояния) и уравнений движения.
2. Расчет характеристик поля для наиболее характерных (модельных) типов источников.
3. Анализ внешних проявлений (воздействий) электромагнитного поля.

# ЭЛЕКТРОСТАТИКА, ЕЕ ПРЕДМЕТ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЗАРЯД И ЕГО СВОЙСТВА

Предметом электростатики является электростатическое поле (ЭСП) - простейший вид (состояние) электромагнитного поля, порождаемый и неразрывно связанный с неподвижными (в данной системе отсчета) электрически заряженными телами, существующий в окружающем их пространстве и проявляющий себя в силовом действии на другие заряженные тела.

Понятие поля вводится в физике для объяснения наблюдаемых в опыте фактов силового действия друг на друга пространственно разнесенных (не соприкасающихся непосредственно) заряженных тел, тел обладающих электрическим зарядом.

**Электрический заряд, выступает мерой интенсивности участия тел в электрическом взаимодействии, обладает следующими характеристиками:**

1. **Двузначность.** Различные заряженные тела могут, как притягиваться, так и отталкиваться при взаимодействии; для объяснения этого факта и было введено представление о наличии в природе электрического заряда **двух знаков**. Исторически сложилось, что заряд электрона считают отрицательным, а протона - положительным.

В обычном состоянии тела содержат равное количество протонов и электронов и поэтому являются электрически нейтральными. При некоторых условиях, например, при трении тел или их облучении, баланс зарядов разного знака может нарушаться. Говорят, что тела электризуются, т. е., приобретают ненулевой заряд того или иного знака.

2. **Сохраняемость.** При любых изменениях в замкнутой системе (не обменивающейся веществом с окружением) полный ее заряд остается неизменным (сохраняется).

3. **Дискретность.** Существует наименьшая, неделимая далее порция электрического заряда, равная  $\pm 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Таким элементарным зарядом обладает электрон (со знаком – минус) и протон - со знаком плюс. **Единица заряда в СИ - кулон определяется через основную электрическую единицу - ампер - как заряд, переносимый через поперечное сечение проводника постоянным током силой в 1А за одну секунду.**

4. **Релятивистская инвариантность,** то есть независимость от скорости движения заряженного тела, или, иными словами, независимость от выбора ИСО.

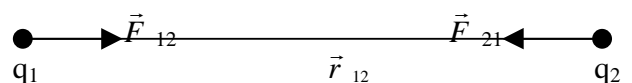
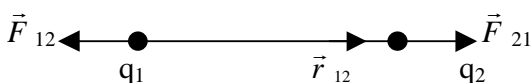
## Закон Кулона. Характер сил электростатического взаимодействия точечных зарядов и основные характеристики и уравнения электростатического поля

**Основной закон электростатики - закон Кулона (1785 г)** устанавливает характер сил электростатического взаимодействия на уровне точечных неподвижных электрически заряженных тел (точечных зарядов). Он утверждает, что **сила электростатического взаимодействия между двумя точечными неподвижными зарядами (а также зарядами сферической формы)  $q_1$ , и  $q_2$ , в однородной и изотропной среде прямо пропорциональна значениям этих зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними и диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  среды и направлена вдоль прямой, соединяющей заряды так, что одноименные заряды ( $q_1 \cdot q_2 > 0$ ) отталкиваются, а разноименные ( $q_1 \cdot q_2 < 0$ ) притягиваются:**

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} = k \cdot (q_1 \cdot q_2 / \epsilon r_{12}^2) \cdot \vec{r}_{12} / r_{12} \quad | \vec{F}_{12} | = | \vec{F}_{21} | = F = k | q_1 \cdot q_2 | / \epsilon r^2, \text{ где } r = | \vec{r}_{12} | - \text{расстояние между зарядами } q_1 \text{ и } q_2.$$

а)  $q_1 \cdot q_2 > 0$  (заряды одного знака)

б)  $q_1 \cdot q_2 < 0$  (заряды разного знака)



Коэффициент пропорциональности  $k$  в СИ равен  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2 = 1 / 4\pi\epsilon_0$ , где  $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2$  - электрическая постоянная, являющаяся фундаментальной физической константой.

Согласно закону Кулона, силы электростатического взаимодействия между точечными зарядами в однородной изотропной среде обладают следующими характерными особенностями:

1) являются **центральными (радиальными)**, т. е.  $\vec{F}_{12} \sim \vec{r}_{12}$  и, таким образом, как следует из механики, являются консервативными, т. е. их работа не зависит от формы траектории, а определяется лишь положениями начальной и конечной точек перемещения и равна нулю по замкнутой траектории;

2) **обратно квадратичны удалению**, т. е.  $|F_{12}| = |F_{21}| = |F| \sim 1/r_{12}^2$ ;

3) **линейно пропорциональны величинам зарядов**, т. е.  $F \sim q_1$  и  $F \sim q_2$ ;

4) **ослабляются однородной диэлектрической средой пропорционально ее диэлектрической проницаемости  $\epsilon$** .

С позиций полевой концепции взаимодействия каждый из электрических зарядов создает в окружающем пространстве их электрическое поле, которое и оказывает силовое воздействие на другие заряды, изменяя состояние их движения.

Для характеристики электрического поля вводят специальные функции координат (функции точки), а, т. к. электростатическое поле является потенциальным (его силы – консервативны), то его можно характеризовать и силовой – напряженностью  $\vec{E}$ , и энергетической – потенциалом  $\phi$  полевыми функциями.

Линейная связь сил электростатического взаимодействия с величинами зарядов позволяет ввести **силовую характеристику ЭСП – напряженность  $\vec{E}$**  – как удельную силу, т. е. **силу, действующую со стороны поля на единичный неподвижный положительный заряд в данной точке поля:**

$$\vec{E} = \vec{F}/q \quad [\text{Н/Кл}]$$

Поскольку  $F \sim q$ , то отношение  $\vec{F}/q = \vec{E}$  – не зависит от значения заряда  $q$  и характеризует поле само по себе (силу поля) в данной его точке.

Из закона Кулона получим:

$$\vec{E} = \vec{F}_{12}/q' = [(kqq'/r^2) \cdot \vec{r}/r]/q' = (kq/r^3) \cdot \vec{r} \Rightarrow E = kq/r^2$$

Важным положением в электростатике является известный еще из механики **принцип суперпозиции (или принцип наложения) сил, выражающий независимость их действия при наличии нескольких сил**. В электростатике его называют **принципом суперпозиции электростатических полей**, и он выражает характеристики результирующего ЭСП при наличии нескольких источников (зарядов). **Согласно принципу суперпозиции, при наличии нескольких зарядов ЭСП напряженность  $\vec{E}_\Sigma$  создаваемого ими результирующего ЭСП определяются векторной суммой напряженностей  $\vec{E}_i$  полей, которые бы создавал каждый из этих зарядов в отдельности:**

$$\vec{E}_\Sigma = \Sigma \vec{E}_i$$

Чтобы ввести энергетическую характеристику ЭСП – потенциал  $\phi$ , необходимо сначала убедиться в потенциальном характере ЭСП. Для этого нужно показать, что силы ЭСП являются консервативными, то есть их работа по перемещению заряда не зависит от формы траектории. Для простоты составим выражение для работы  $A_{12}$  перемещения пробного заряда  $q'$  в поле неподвижного точечного заряда  $q$ :

$$A_{12} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int (kqq'/r^2) dr = kqq' \int dr/r^2 = kqq'(1/r_1 - 1/r_2).$$

Действительно, получили выражение, из которого следует, что работа  $A_{12}$  сил ЭСП точечного заряда  $q$  по перемещению пробного заряда  $q'$  не зависит от формы траектории перемещения, а определяется лишь его начальным и конечным положениями  $r_1$  и  $r_2$ . В качестве энергетической характеристики этого положения и выбирается скалярная величина, называемая **потенциалом ЭСП**.

Полученный результат о потенциальном характере ЭСП неподвижного точечного заряда можно обобщить на ЭСП, создаваемое произвольной системой неподвижных точечных зарядов.

**Энергетическая характеристика ЭСП – потенциал  $\phi$** . Выражение для  $\phi$  можно получить из известного выражения, связывающего силу и потенциальную энергию, согласно которому, сила есть антиградиент потенциальной энергии (или проекция силы на некоторое направление равна быстрой убыли потенциальной энергии  $W_n$  в данном направлении):

$$\vec{F} = - \text{grad } W_n \Rightarrow \vec{E}/q = - \text{grad } W_n/q \Rightarrow \vec{E} = - \text{grad } \phi,$$

где за потенциал  $\varphi$  принято отношение потенциальной энергии взаимодействия заряда с полем к величине заряда:  $\varphi = W_{\text{п}}/q$  - удельная по заряду потенциальная энергия, то есть **потенциальная энергия единичного положительного заряда в данной точке поля**, измеряемая в вольтах:

$$[\text{Дж/Кл} = \text{В}].$$

$$\text{Или } F_x = -\partial W_{\text{п}}/\partial x \Rightarrow E_x = -\partial\varphi/\partial x \quad [\text{В/м}]$$

Из взаимосвязи силовой и энергетической характеристик ЭСП для напряженности можно получить иное выражение и трактовку. Будучи антиградиентом потенциала, выражая своей проекцией быстроту убыли потенциала в соответствующем направлении, напряженность, наряду с исходным выражением  $\vec{E} = \vec{F}/q$ , определяющим ее как удельную силу (в расчете на единицу заряда), измеряется и в В/м. Эта единица показывает, на сколько вольт убывает потенциал на единице длины в соответствующем направлении

Двоякая интерпретация может быть дана и энергетической характеристике ЭСП - потенциалу  $\varphi$ . С одной стороны, потенциал  $\varphi = W_{\text{п}}/q$  - представляет собой удельную потенциальную энергию ЭСП в данной точке поля, т. е. потенциальную энергию, которую приобретает в данной точке ЭСП единичный положительный заряд.

С другой стороны, поскольку потенциальная энергия (энергия взаимодействия) определяется неоднозначно - с точностью до константы, а ее изменение (убыль) равно работе консервативных сил (какими и являются силы ЭСП), то и потенциал  $\varphi$  может быть выражен через работу сил ЭСП по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность (потенциал точки, достаточно удаленной от источников поля может быть принят равным нулю).

$$A_{12} = -\Delta W_{\text{п}} = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = A_{12}/q, \text{ или, при } \varphi_2 \rightarrow 0 \quad \varphi_1 = A_{1\infty}/q.$$

Для однородного ЭСП, напряженность  $\vec{E}$  в котором во всех точках одинакова, взаимосвязь между силовой и энергетическими характеристиками упрощается и становится более наглядной:

$$E_x = -\Delta\varphi/\Delta x = (\varphi_1 - \varphi_2)/(x_2 - x_1)$$

Обратный переход от напряженности к потенциалу, точнее, к разности потенциалов, выражается интегральным соотношением:

$$d\varphi = -E dx \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{x_1}^{x_2} E_x dx \quad \text{или} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr$$

Для однородного поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E_x(x_2 - x_1)$$

Для наглядности ЭСП изображают с помощью силовых линий - касательные, к которым совпадают с направлением вектора  $\vec{E}$  в каждой точке поля, а их густота пропорциональна численному значению напряженности ЭСП в данном месте, и с помощью эквипотенциальных поверхностей, все точки которых имеют одинаковый потенциал. Характерным для ЭСП является перпендикулярность силовых линий эквипотенциальным поверхностям. Это следует из того, что вдоль эквипотенциальной поверхности  $d\varphi = 0$ , а, т. к.  $E_{\tau} = -d\varphi/d\tau$ , то и  $E_{\tau}$ , т. е. проекция вектора  $\vec{E}$

на эквипотенциальную поверхность, равна нулю и, стало быть, вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

Характерным для ЭСП является также то, что его силовые линии - разомкнуты. Они имеют начало - на положительных зарядах и конец - на отрицательных зарядах. Замкнутость силовой линии означала бы неравенство нулю работы сил ЭСП по замкнутой траектории, совпадающей с силовой линией, что противоречит его потенциальному характеру.

Силовые линии направлены в сторону убыли потенциала, от большего его значения к меньшему. Формально это следует из взаимосвязи напряженности и потенциала, в соответствии, с которой напряженность есть антиградиент потенциала, а градиент, по определению, есть вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания функции (в данном случае - потенциала).

В математическом плане ЭСП, являясь векторным полем, полностью характеризуется двумя теоремами, которые в интегральной форме записываются для циркуляции и потока вектора поля (в данном случае - вектора  $\vec{E}$ ). Циркуляция есть криволинейный интеграл от векторной функции поля по замкнутому контуру. Принимая во внимание смысл вектора  $\vec{E} = \vec{F}/q$  - сила, действующая на

единичный положительный заряд, для циркуляции вектора  $\vec{E}$  получаем:  $\oint_L \vec{E} d\vec{l}$  - работа сил ЭСП по перемещению единичного положительного заряда по замкнутой траектории.

В силу потенциального характера ЭСП работа его сил (являющихся консервативными) по замкнутому контуру нулю. Отсюда следует и теорема о циркуляции вектора  $\vec{E}$ : циркуляция вектора напряженности электростатического поля равна нулю. Эта теорема является следствием центрального (радиального) характера сил ЭСП:  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_{\parallel} dl = 0$ . Из нее следует разомкнутый характер силовых линий ЭСП; в противном случае, перемещая заряд вдоль замкнутой силовой линии, совершали бы ненулевую работу, что противоречит условию потенциальности ЭСП.

Второй важнейшей теоремой ЭСП является теорема о потоке вектора  $\vec{E}$ , называемая теоремой Остроградского-Гаусса, иногда - просто теоремой Гаусса. Под потоком  $\Phi$  вектора через некоторую поверхность понимают поверхностный интеграл от вектора через соответствующую поверхность. Наглядно поток вектора через какую-либо поверхность представляет собой скалярную характеристику векторного поля, которая пропорциональна числу силовых линий, пронизывающих соответствующую поверхность. Математически же поток  $\Phi$  вектора, в данном случае, поток вектора  $\vec{E}$ , записывается в виде поверхностного интеграла:

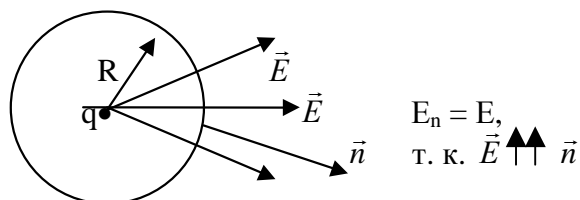
$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S E_n dS, \quad \text{где } E_n - \text{проекция}$$

вектора  $\vec{E}$  на направление  $\vec{n}$  внешней нормали к элементарной площадке  $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ . Из этого соотношения напряженности  $\vec{E}$  можно придать смысл поверхностной плотности потока (потока силовых линий), то есть величины, пропорциональной числу силовых линий, пронизывающих поверхность с единичной площадью.

Теорема о потоке вектора напряженности ЭСП - теорема Остроградского - Гаусса утверждает, что поток  $\Phi_E$  вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  не зависит от размера и формы поверхности, а определяется лишь полным электрическим зарядом  $q_{\Sigma}$ , находящимся внутри замкнутой поверхности, будучи численно равным этому заряду, деленному на электрическую постоянную  $\epsilon_0$ :  $\oint_S E_n dS = q_{\Sigma} / \epsilon_0$

Покажем на примере точечного заряда  $q$  справедливость теоремы Остроградского - Гаусса.

Окружим точечный заряд замкнутой поверхностью для простоты в виде сферы радиуса  $R$  и вычислим поток вектора  $\vec{E}$  от точечного заряда через эту сферическую поверхность. Выражение для напряженности  $E$  поля точечного заряда  $q$  получим из закона Кулона, из силы взаимодействия его с пробным зарядом  $q'$ :



$$\vec{E} = \vec{F}_{12}/q' = (kq q' / r^2) q' \Rightarrow E = kq / r^2 \quad (k = 1/4\pi\epsilon_0)$$

Подставляя это выражение в формулу для потока вектора  $\vec{E}$ , получим:

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES = (kq/R^2) 4\pi R^2 = q/\epsilon_0.$$

Действительно, поток вектора  $\vec{E}$  равен заряду, находящемуся внутри замкнутой поверхности, деленному на  $\epsilon_0$ . Такая связь характеристики ЭСП (потока вектора  $\vec{E}$ ) с источниками его порождающими (с зарядами), с одной стороны, является важным законом природы (следствием закона «обратных квадратов» в зависимости сил электрического взаимодействия точечных зарядов), а с другой – выступает методом для решения основной задачи электростатики - расчета характеристик поля по известному распределению его источников - электрических зарядов. Это наглядно видно на примере точечного заряда и случая сферической поверхности, поток вектора  $\vec{E}$  через которую, пропорционален ее площади и, соответственно, квадрату ее радиуса.

Обобщая теорему о потоке вектора  $\vec{E}$  ЭСП на произвольную систему зарядов, получим:

$$\oint_S E_n dS = q_{\Sigma} / \epsilon_0$$

где  $q_{\Sigma} = \sum q_i$  - для дискретного распределения зарядов,



$$\text{и } q_{\Sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \int_l \tau dl - \text{для линейного,} \\ \int_s \sigma dS - \text{поверхностного,} \\ \int_v \rho dv - \text{объемного} \end{array} \right\} - \text{непрерывных распределений заряда.}$$

и где  $\tau = dq/dl$  - линейная,  $\sigma = dq/dS$  - поверхностная и  $\rho = dq/dv$  - объемная плотности заряда, измеряемые в Кл/м, Кл/м<sup>2</sup> и Кл/м<sup>3</sup>, соответственно. В случае равномерного распределения заряда производные заменяются отношениями:  $\tau = q/l$ ,  $\sigma = q/S$  и  $\rho = q/V$  и представляют собой соответственно заряд единицы длины, единицы площади и единицы объема заряженного тела.

Учитывая, что в диэлектрической среде электрическое поле ослабляется в  $\epsilon$  раз, иногда вводят **вспомогательную силовую характеристику  $\vec{D}$ , которая называется электрическое смещение или вектор индукции электрического поля**, связанную с основной силовой характеристикой ЭСП - вектором напряженности  $\vec{E}$  следующим соотношением:  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$

Эта величина характеризует силу ЭСП в вакууме, т. е. ЭСП самого по себе, без учета среды. Она облегчает расчет характеристик ЭСП в неоднородных диэлектрических средах. Использование вектора  $\vec{D}$  позволяет придать более простой вид теореме Остроградского - Гаусса:

$$\oint_s \vec{D} d\vec{S} = \oint_s D_n dS = q_{\Sigma}$$

- поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность не зависит от размеров и формы этой поверхности, а определяется алгебраической суммой свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности, будучи численно равным значению этого заряда.

ЭСП полностью характеризуется двумя теоремами: теоремой о циркуляции и теоремой о потоке вектора  $\vec{E}$ . Эти теоремы образуют полную систему уравнений ЭСП в интегральной форме. В решении конкретных задач электростатики часто удобным оказывается использование энергетической характеристики - потенциала  $\phi$  и вспомогательной силовой характеристики - вектора индукции ЭСП -  $\vec{D}$ . При этом необходимыми оказываются уравнения связи энергетической и силовой характеристик ЭСП  $E = -\text{grad } \phi$  и основной и вспомогательной силовых характеристик ЭСП  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ .

Фактически обе теоремы ЭСП эквивалентны одному закону Кулона и по сути являются его следствиями, - следствиями устанавливаемых этим законом основных свойств ЭСП - его потенциальности (консервативности сил ЭСП) и закона "обратных квадратов" в зависимости сил от расстояния.

## Методы расчета основных характеристик электростатического поля.

Расчет характеристик ЭСП является одной из важнейших задач электростатики. Ее решение основывается на использовании основных уравнений электростатики, связывающих характеристики ЭСП с характеристиками источников, его порождающих. Одним из таких уравнений является теорема Остроградского - Гаусса, связывающая поток вектора  $\vec{E}$  с зарядом его обуславливающим. В качестве другого уравнения часто используют выражение для напряженности ЭСП, создаваемого точечным зарядом, дополняемое принципом суперпозиции.

Рассмотрим некоторые примеры использования этих уравнений в качестве метода расчета характеристик ЭСП в простейших модельных ситуациях.

**Использование закона Кулона и принципа суперпозиции для расчета напряженности ЭСП электрического диполя.**

Из закона Кулона вытекает важная в силу своей элементарности формула для напряженности ЭСП точечного заряда:

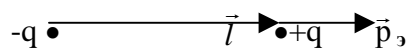
$$\vec{E} = kq/(\epsilon r^2) \cdot \vec{r} / r$$

Т. к. любое реальное заряженное тело можно представить состоящим из заряженных точечных частиц, то, зная характеристики ЭСП точечного заряда и правила их суммирования (принцип суперпозиции), можно определять характеристики результирующего ЭСП, создаваемого всем заряженным телом в целом. Задача суммирования (или, - в случае непрерывного распределения зарядов - интегрирования) элементарных напряженностей и потенциалов точечных зарядов в общем

случае является достаточно сложной и полностью может быть решена лишь в простейших ситуациях распределения точечных зарядов. Одним из таких случаев является **электрический диполь - система двух одинаковых по численному значению, но противоположных по знаку электрических зарядов**. Его основной характеристикой является электрический момент  $\vec{p}_\ominus$  - величина, равная произведению заряда диполя на его плечо:

$$\vec{p}_\ominus = q \cdot \vec{l}$$

- плечом диполя называют вектор, соединяющий отрицательный и положительный заряды диполя.



Электрический диполь является простейшей электрической моделью атомов и молекул, а также диэлектрических образцов, тел в целом.

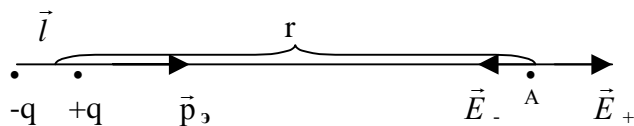
Принцип суперпозиции позволяет рассчитать напряженность ЭСП диполя как векторную сумму напряженностей, создаваемых его отрицательным и положительным точечными зарядами:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Проведем расчет напряженности ЭСП диполя для двух частных случаев:

### I. Напряженность ЭСП диполя в точках вдоль его оси.

Как видно из рисунка, в точках вдоль оси диполя, суммирование векторов  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  сводится к суммированию. Напряженность ЭСП в некоторой точке А, удаленной от центра диполя на расстояние  $r$ , направлена вдоль оси диполя и численно равна



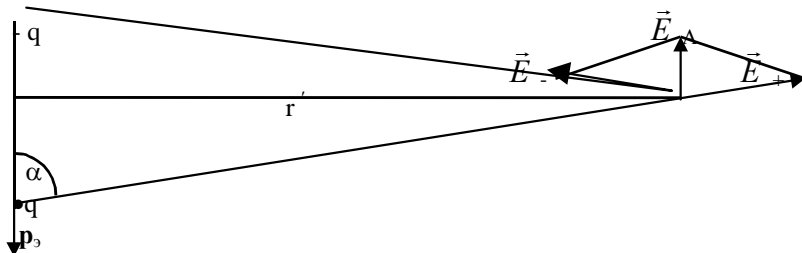
$$E = E_+ + E_- = kq[1/(r - l/2)^2 - 1/(r + l/2)^2] = kq[(r + l/2)^2 - (r - l/2)^2] / [(r + l/2)^2 \cdot (r - l/2)^2]$$

В так называемой дальней зоне (при  $r \gg l$ )<sup>1</sup> напряженность ЭСП диполя на его оси принимает более простой вид:

$$E \cong kq \cdot 2l/r^3 = k2p_\ominus/r^3$$

### II. Напряженность ЭСП диполя в точках на срединном перпендикуляре к оси диполя.

Точка В, находящаяся на перпендикуляре к оси диполя, проведенном из его центра, равноудалена от зарядов диполя, поэтому  $E_A = E_B = kq/[(r')^2 + l^2/4]$



Для дальней зоны, т. е. при  $r' \gg l$ ,  $E_+ = E_- = kq/(r')^2$

Численное значение напряженности ЭСП в точке В будет равно:

$$E_B = 2 \cdot E_+ \cos \alpha = 2(kq/r'^2) \cdot 1/2 \sqrt{(r'^2 + l^2/4)} \cong kql/r'^3 = kp_\ominus/r'^3$$

По направлению вектор  $\vec{E}$  противоположен направлению электрического момента диполя  $\vec{p}_\ominus$ .

### Применение теоремы Остроградского-Гаусса к расчету характеристик ЭСП симметричных, равномерно заряженных тел.

При наличии неточечных, неэлементарных источников ЭСП расчет их характеристик с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции обычно наталкивается на значительные математические трудности. Во многих случаях более просто характеристики их ЭСП

<sup>1</sup> Условие  $r \gg l$  адекватно так называемому **точечному** диполю.

(напряженность и потенциал) вычисляются с помощью теоремы Остроградского – Гаусса, носящей скалярный характер. Так как для определения трех неизвестных ( $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  - составляющих вектора  $\vec{E}$ ) одного уравнения недостаточно, то применение этой теоремы дополнительно требует определенной симметрии поля и его источников. Наличие той или иной симметрии заряженного тела позволяет выбрать соответствующую замкнутую поверхность, через которую сравнительно просто вычисляется поток вектора напряженности (или индукции) ЭСП, а через него и сама напряженность.

Рассмотрим применение теоремы Остроградского-Гаусса для расчета характеристик ЭСП, создаваемого простейшими симметричными, равномерно заряженными телами:

### а) расчет характеристик ЭСП заряженной сферы

Имеем сферу радиуса  $R$ , равномерно заряженную зарядом  $q$  с поверхностной плотностью  $\sigma = q/S = q/4\pi R^2$ . В качестве замкнутой поверхности, через которую вычисляется поток вектора  $\vec{E}$  для теоремы Остроградского-Гаусса, логично выбрать сферическую поверхность, концентрическую, т. е. имеющую общий центр с заряженной сферой, являющейся источником ЭСП. В силу сферической симметрии, все точки выбранной поверхности являются электрически эквивалентными, т. е. значения вектора  $\vec{E}$  в них одинаковы, а его направление совпадает с нормалью  $\vec{n}$  (в случае положительного заряда  $q$  - с внешней нормалью) к сферической поверхности. Поэтому для потока вектора  $\vec{E}$  имеем:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$$

Для наружной области, т. е. для  $r \geq R$ , найденный поток вектора  $\vec{E}$  равен, в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса, заряду, находящемуся внутри поверхности, через которую вычисляется поток, (т. е. заряду  $q$  в нашем случае), деленному на  $\epsilon_0 \epsilon$ .

Из этого равенства и выражаем значение напряженности  $\vec{E}$  ЭСП, создаваемого равномерно заряженной сферой во внешней области и на ее поверхности:

$$\text{Из } E4\pi r = q/\epsilon_0 \Rightarrow E = q/(4\pi\epsilon_0 r^2) = kq/\epsilon r^2, \text{ или} \\ E = k\sigma S_{\text{сф}}/\epsilon r = k\sigma 4\pi R/\epsilon r^2 = \sigma R/\epsilon_0 \epsilon r^2.$$

Для потенциала  $\phi$  получается следующее выражение:

$$\phi = \int E dr = kq \int dr/\epsilon r = kq(-1/r) = kq/\epsilon r$$

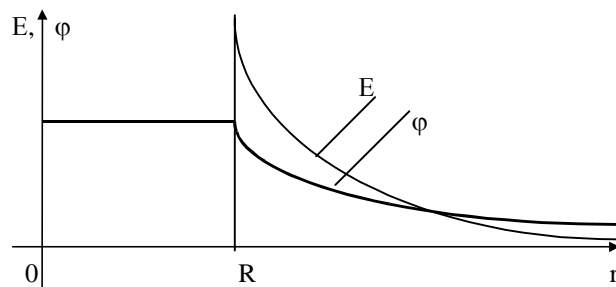
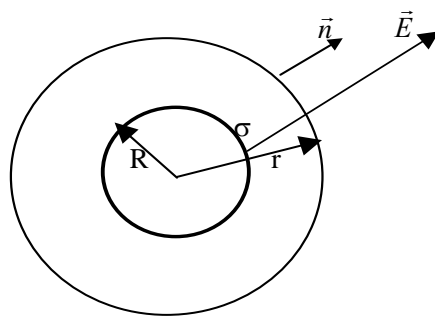
Нетрудно видеть, что полученные выражения совпадают с аналогичными для точечного заряда. Это является проявлением одинакового характера ЭСП - сферического, создаваемого и точечным зарядом, и равномерно заряженной сферой.

Во внутренней области сферы, создающей ЭСП, т. е. при  $r < R$  заряда нет, поэтому, поток вектора  $\vec{E}$  через любую замкнутую поверхность в этой области равен нулю. Это может быть только при равенстве нулю самого вектора  $\vec{E}$ ; таким образом, внутри равномерно заряженной сферы напряженность ЭСП равна нулю. Потенциал же  $\phi$  внутри заряженной сферы сохраняет постоянное значение, равное его значению на поверхности сферы.

Характер зависимости напряженности  $\vec{E}$  и потенциала  $\phi$  равномерно заряженной сферы от радиальной координаты  $r$  представлен на рис.

Напряженность  $\vec{E}$ , будучи антиградиентом потенциала  $\phi$ , ведет себя как отрицательная производная потенциала по пространственной координате. Внутри заряженной сферы потенциал постоянен, напряженность равна нулю. Во внешней области, потенциал гиперболически убывает, его производная (со знаком минус), также убывает, но более быстро, по закону обратных квадратов.

Закон обратных квадратов, справедливый и для точечных заряженных тел, связан со сферической симметрией ЭСП. Т. к. поверхность, точнее ее площадь, возрастает квадратично с возрастанием



радиуса, то с удалением от центра плотность силовых линий, т. е. их число через единицу площади (а это и есть сила ЭСП, его напряженность) убывает обратно пропорционально квадрату радиуса.

Внутри заряженной сферы, опять же, в силу радиальной симметрии, через каждый элемент поверхности проходит равное число силовых линий прямого и обратного направлений, так, что результирующая напряженность оказывается равной нулю. Все эти качественные выводы и были получены формально, чисто математически, путем применения теоремы Остроградского - Гаусса к анализу ЭСП равномерно заряженной сферы.

### б) расчет характеристик ЭСП равномерно заряженной бесконечно длинной прямолинейной нити (цилиндра)

Основной характеристикой зарядового состояния линейно протяженных объектов (нити, провода, цилиндра и т. п.) является линейная плотность заряда  $\tau$ , которая, в случае равномерного заряжения, численно равна заряду, приходящемуся на единицу длины объекта. Осевая (аксиальная) геометрическая симметрия прямолинейных заряженных объектов порождает, при условии равномерного заряжения, соответствующую электрическую симметрию, т. е. осевую симметрию ЭСП, создаваемого такими объектами. Поэтому в качестве замкнутой поверхности интегрирования для теоремы Остроградского - Гаусса в применении к таким объектам целесообразно выбрать цилиндрическую поверхность, соосную (коаксиальную) с заряженным объектом.

Окружим отрезок равномерно заряженного проводника длиной  $l$  цилиндрической поверхностью радиусом  $r$  и вычислим поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность. Вследствие радиально-осевой симметрии источника и самого ЭСП, его силовые линии перпендикулярны к боковой поверхности цилиндра и скользят вдоль его оснований, не пронизывая их. Все точки боковой поверхности являются электрически эквивалентными, т. е. численное значение напряженности  $E$  в них имеет одно и то же значение. Поток вектора  $\vec{E}$  через указанную цилиндрическую поверхность может быть расписан следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \int_S E_n dS + 2 \int_S E_n dS = \\ &= \int_S E dS = E \int_S dS = ES_{\text{бок}} = E2\pi r l \end{aligned}$$

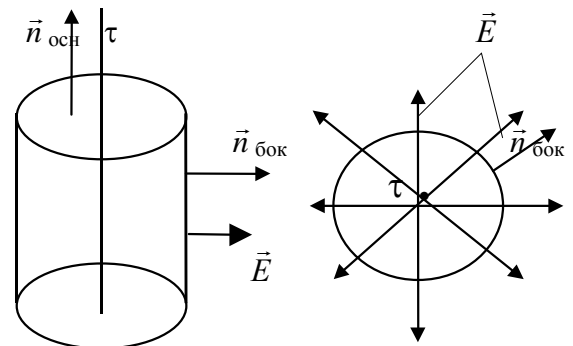
Полная (замкнутая) поверхность цилиндра высотой  $h$  и радиусом основания  $r$  разбивается при вычислении потока вектора  $\vec{E}$  через нее на боковую поверхность и поверхность двух оснований.

Т. к. вектор  $\vec{E}$  скользит вдоль оснований, его поток через них равен нулю. При вычислении же потока вектора  $\vec{E}$  через боковую поверхность цилиндра учтено, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен боковой поверхности, т. е. его проекция на нормаль к ней равна самому численному значению  $E$ . Учтено также, что во всех точках боковой поверхности значение  $E$  постоянно, и потому  $E$  может быть вынесена за знак интеграла.

Полученное значение потока вектора  $\vec{E}$  приравниваем, в соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса, к суммарному заряду, находящемуся внутри замкнутой цилиндрической поверхности, деленному на  $\epsilon_0$ . Внутри цилиндра высотой  $h$  попадает заряд  $q_\Sigma$ , равный  $q_\Sigma = \tau h$ . Приравнивая обе части теоремы Остроградского - Гаусса, выразим напряженность  $E$  ЭСП равномерно заряженной нити:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E_n dS = E2\pi r l = q_\Sigma = \tau h \Rightarrow E = \tau / (2\pi\epsilon_0 r) = 2k\tau / r \quad (k = 1/4\pi\epsilon_0)$$

Как видно из полученного выражения, напряженность ЭСП равномерно заряженной нити (цилиндра) убывает гиперболически с удалением от нити, т. е. медленнее, чем напряженность  $E$  точечного заряда или равномерно заряженной сферы. Это связано с тем, что при осевой симметрии силовые линии не так быстро расходятся (рассеиваются) с удалением от источника ЭСП, как при сферической симметрии, характерной для точечного заряда и равномерно заряженной сферы. Большую «мощность» ЭСП нити по сравнению с точечным зарядом можно объяснить также тем, что нить представляет собой линейно упорядоченную совокупность точек, то есть, ее ЭСП есть множество ЭСП составляющих ее точек.



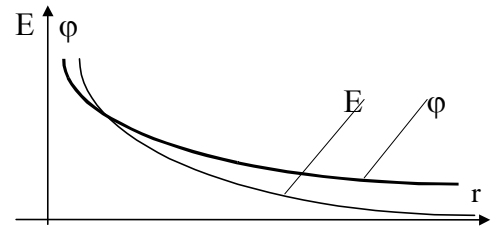
Из полученного выражения для напряженности, получим выражение для потенциала и разности потенциалов ЭСП равномерно заряженной бесконечно длинной нити (цилиндра):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \int_{r_1}^{r_2} 2k\tau dr/\varepsilon r = (2k\tau/\varepsilon) \int_{r_1}^{r_2} dr/r = (2k\tau/\varepsilon)(\ln r_2 - \ln r_1) = (2k\tau/\varepsilon) \ln r_2/r_1 \Rightarrow$$

$$\varphi = - (2k\tau/\varepsilon) \ln r + \text{const};$$

при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$

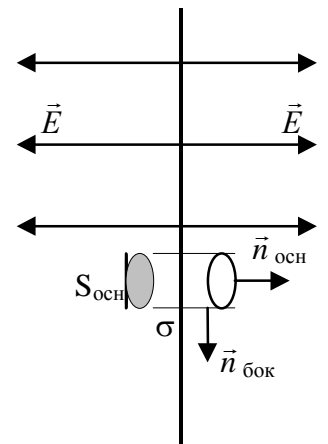
Для наглядности зависимости  $E$  и  $\varphi$  от радиального удаления  $r$  от нити изображены на рис. Отметим, что понятие потенциала, вследствие своей неоднозначности, оказывается недостаточно адекватной характеристикой ЭСП протяженных источников.



**в) расчет характеристик ЭСП бесконечной равномерно заряженной плоскости.**

Зарядовое состояние поверхностных объектов характеризуется поверхностной плотностью  $\sigma$  заряда, которая в случае равномерного заряжения численно равна  $\sigma = q/S$  - заряду, приходящемуся на единицу площади заряженной поверхности.

У равномерно заряженной бесконечной плоскости силовые линии обязаны быть перпендикулярны плоскости, поэтому в качестве замкнутой поверхности, через которую вычисляется поток вектора  $\vec{E}$  в теореме Остроградского - Гаусса, целесообразно выбрать цилиндр, ось которого перпендикулярна плоскости, а основания равноудалены от нее. Вычислим поток вектора  $\vec{E}$  от плоскости с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  через замкнутую поверхность цилиндра, расположенного симметрично - перпендикулярно заряженной плоскости:



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = 2 \int_S E_n dS = 2E \int_S dS = 2ES_{\text{очн}}$$

Также как и в случае с заряженной нитью, замкнутую цилиндрическую поверхность разбиваем на боковую поверхность и поверхность двух оснований, причем, здесь поток вектора  $\vec{E}$  через боковую поверхность будет равным нулю, т. к. вектор  $\vec{E}$  параллелен оси цилиндра и лишь скользит вдоль его боковой поверхности, не пронизывая её. При вычислении же потока через основания цилиндра учтено, что вектор  $\vec{E}$  перпендикулярен к ним, и его проекция на внешнюю нормаль  $\vec{n}_{\text{очн}}$  к ним совпадает с самим модулем вектора  $\vec{E}$ , то есть  $E_n = E$ . Все точки поверхности оснований являются электрически эквивалентными, поэтому вектор  $\vec{E}$  в них сохраняет постоянное значение и  $E$  может быть вынесена за знак интеграла при вычислении потока  $\vec{E}$ . Оба основания являются электрически эквивалентными друг другу, и поток вектора  $\vec{E}$  через них равен удвоенному значению потока через одно из них.

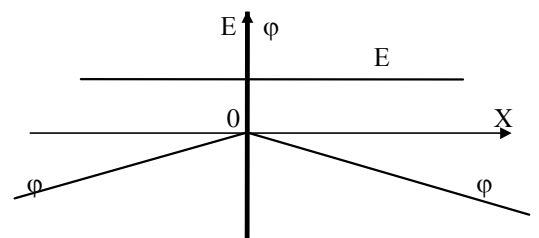
Внутри выбранной цилиндрической поверхности попадет заряд  $q_{\Sigma}$ , равный  $\sigma S_{\text{очн}}$ . Записывая теорему Остроградского - Гаусса для данной поверхности, выразим из нее напряженность ЭСП равномерно заряженной бесконечной плоскости, а затем и разность потенциалов (и потенциал);

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = 2ES_{\text{очн}} = q_{\Sigma} = \sigma S_{\text{очн}} \Rightarrow E = \sigma/2\varepsilon_0\varepsilon$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \int \sigma dx/(2\varepsilon_0\varepsilon) = \sigma(x_2 - x_1)/2\varepsilon_0\varepsilon \Rightarrow$$

$$\varphi = -\sigma x/2\varepsilon_0\varepsilon + \text{const}.$$

Для наглядности изобразим зависимость  $E$  и  $\varphi$  от удаления  $x$  от заряженной плоскости на рис.



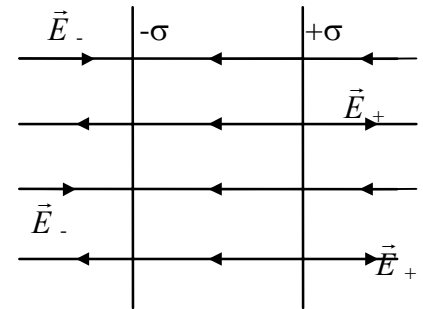
ЭСП бесконечной равномерно заряженной плоскости является настолько сильным, что его

напряженность не убывает с удалением  $x$  от плоскости, сохраняя постоянное значение. (Саму плоскость можно представлять как составленную из множества заряженных нитей, а ее ЭСП - как суперпозицию полей нитей).

Т. к.  $E = \text{const}$  и  $E = -d\varphi/dx$  - есть пространственная производная со знаком минус от потенциала, то потенциал должен быть линейно убывающей функцией расстояния от плоскости с отрицательными значениями:  $E = \text{const} \rightarrow$  означает постоянство быстроты убыли потенциала при удалении от нити.

#### г) расчет характеристик ЭСП конденсатора (плоского).

Плоским конденсатором называют систему из двух, разделенных диэлектриком пластин, равномерно заряженных зарядом разного знака. При условии, что размеры пластин много больше расстояния между ними, ЭСП пластин конденсатора можно рассчитывать по формулам, полученным для безграничных пластин. ЭСП же конденсатора в целом рассчитаем, используя принцип суперпозиции, как векторную сумму полей (напряженностей) его пластин. Изобразим на рисунке характер силовых линий ЭСП пластин конденсатора.



Из чертежа видно, что в наружных областях, слева и справа от конденсатора, силовые линии от разнозарядово заряженных пластин направлены в противоположные стороны. Поскольку же при одинаковой по величине плотности  $\sigma$  заряда напряженности ЭСП от каждой из пластин равны численно друг другу, то результирующая напряженность ЭСП всего конденсатора в наружных областях равна нулю. Все ЭСП конденсатора сосредоточено между его обкладками (пластинами). В этой, внутренней области конденсатора напряженность (густота силовых линий) ЭСП конденсатора численно равна удвоенному значению напряженности от одной из его пластин - это видно из рисунка.

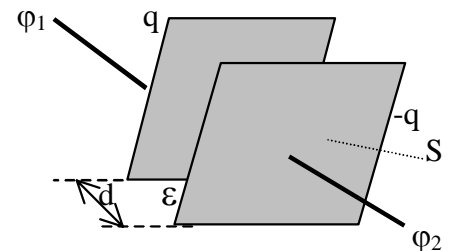
ЭСП конденсатора, также как и ЭСП бесконечной равномерно заряженной пластины, является однородным, т. к. напряженность у них не зависит от положения и является постоянной во всех точках поля. Для однородного ЭСП справедлива следующая взаимосвязь между напряженностью и разностью потенциалов:

$$\Delta\varphi = -E\Delta x; \quad E = \sigma/\epsilon_0\epsilon; \quad \Delta\varphi = \sigma d/\epsilon_0\epsilon$$

Важной характеристикой конденсатора, является отношение заряда  $q$  одной из его пластин к разности потенциалов  $\Delta\varphi$  между ними, называемое *емкостью*  $C$ .

$$C = q/\Delta\varphi = \sigma S/(\sigma d/\epsilon_0\epsilon) = \epsilon_0\epsilon S/d,$$

где  $S$  - площадь одной пластины конденсатора.



#### д) Расчет характеристик ЭСП равномерно заряженного по объему шара

Зарядовое состояние тел, заряженных по объему, характеризуется объемной плотностью  $\rho$  заряда, которая, в случае равномерного заряжения по объему, численно равна отношению  $\rho = q/V$ , то есть - заряду, находящемуся в единице объема заряженного тела. При применении теоремы Остроградского-Гаусса к расчету характеристик ЭСП равномерно заряженного по объему шара целесообразно выделить две области - внутреннюю и внешнюю относительно самого шара. В качестве замкнутой поверхности для вычисления потока вектора  $\vec{E}$  выберем, в соответствии со сферической симметрией источника и самого ЭСП, - сферическую поверхность, концентрическую с заряженным шаром. Вектор  $\vec{E}$  нормален к такой поверхности, и все ее точки являются электрически эквивалентными, т. е. численное значение вектора  $\vec{E}$  в них постоянно. Во внутренней области радиус сферической поверхности, через которую вычисляется поток вектора  $\vec{E}$ , меньше радиуса заряженного шара, т. е.  $r < R$ , и теорема Остроградского - Гаусса примет вид:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS = E \oint_S dS = ES_{сф} = E4\pi r^2;$$

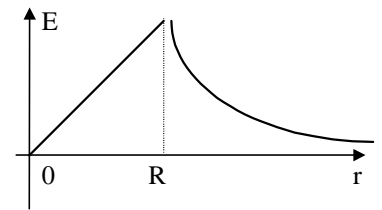
$$q_{\Sigma} = \rho V_{ш} = \rho 4\pi r^3/3; \quad \Phi_E = E4\pi r^2 = q_{\Sigma}/\epsilon_0\epsilon = \rho 4\pi r^3/3\epsilon_0\epsilon \Rightarrow E = \rho r/\epsilon_0\epsilon$$

Напряженность ЭСП равномерно заряженного шара линейно возрастает с удалением от центра в пределах самого шара. Это связано с тем, что с увеличением радиуса объем шара растет кубично, т. е. быстрее, чем его поверхность, которая квадратична радиусу. Вовлекаемый внутрь сферы заряд и порождаемое им число силовых линий, растут быстрее, чем площадь поверхности сферы, в которую эти линии рассеиваются, а потому поверхностная плотность силовых линий (сила поля) возрастает пропорционально удалению от центра шара (в пределах внутренней области шара). Во внешней области, при  $r \geq R$ , с увеличением радиуса сферы ее поверхность возрастает квадратично радиусу, а попадающий внутрь сферы заряд остается неизменным, равным полному заряду шара. Поэтому во внешней области с увеличением радиальной координаты  $r$  сила ЭСП заряженного шара должна убывать, причем по закону обратных квадратов (как для точечного заряда). Именно такой результат получается при формальном применении теоремы Остроградского - Гаусса к внешней области равномерно заряженного шара:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = ES_{сф} = E4\pi r^2; \quad q_{\Sigma} = \rho V_{ш} = \rho 4\pi r^3/3;$$

$$\Phi_E = E4\pi r^2 = \rho 4\pi r^3/3\epsilon_0\epsilon \Rightarrow \boxed{E = \rho R^3/3\epsilon_0\epsilon = kq/\epsilon r^2} \quad (k = 1/4\pi\epsilon_0)$$

Полная зависимость напряженности равномерно, заряженного шара от радиальной координаты  $r$  (удаления от центра шара) приведена на рисунке:



### Внешние проявления ЭСП. Взаимодействие ЭСП с вещественными средами

Конечной задачей учения об электростатическом поле является предсказание характеристик его воздействия на типичные (модельные) вещественные объекты и структуры. Такое воздействие может приводить к изменению характеристик и самого поля; важно изучить и обратное влияние объекта воздействия поля на само ЭСП.

Простейшим модельным объектом воздействия электростатического поля является точечный заряд, затем электрический диполь и, наконец, вещественные среды, которые в электрическом отношении можно подразделить на проводники и диэлектрики, и которые можно моделировать набором точечных зарядов и диполей.

#### Сила и ее работа при действии на точечный заряд.

Точечный заряд является простейшим модельным объектом воздействия ЭСП, из закона взаимодействия ЭСП с которым, собственно получены и сами характеристики ЭСП - силовая - напряженность  $\vec{E}$  и энергетическая - потенциал  $\phi$ . Эти характеристики воздействия ЭСП на точечный заряд содержатся уже в определениях напряженности и потенциала ЭСП. Из выражения для напряженности:  $\vec{E} = \vec{F}/q$  получаем выражение для силы действующей со стороны ЭСП на точечный заряд  $q$ :  $\boxed{\vec{F} = q\vec{E}}$ .

Вкупе с принципом суперпозиции это выражение в принципе позволяет рассчитывать результирующую силу со стороны ЭСП и на неточечные заряженные тела, представляя их в виде дискретного или непрерывного распределения точечных зарядов и производя векторное суммирование или интегрирование.

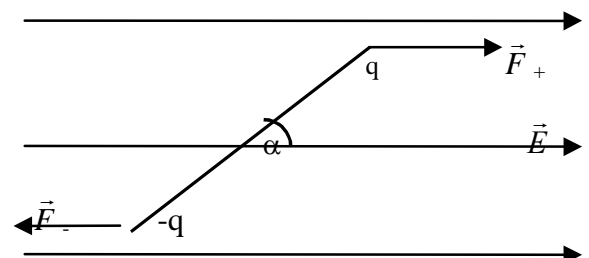
Из выражения для разности потенциалов можно получить формулу для работы сил ЭСП, воздействующего на точечный заряд:

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = A_{12}/q \Rightarrow \boxed{A_{12} = q(\phi_1 - \phi_2) = q \int_{r_1}^{r_2} E_r dr}$$

Напомним, что в механике работа консервативных сил (а такими являются силы ЭСП) определялась через убыль потенциальной энергии или через приращение кинетической энергии:  $A_{12} = W_{п1} - W_{п2} = W_{к2} - W_{к1}$ , или  $q(\phi_1 - \phi_2) = W_{к2} - W_{к1}$ .

#### Момент силы и его работа при действии ЭСП на электрический диполь.

Электрический диполь является простейшей электрической системой, т. е. простейшим



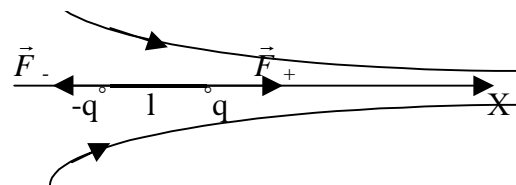
составным электрическим объектом, состоящим из одинаковых по величине, но разных по знаку двух точечных зарядов. В однородном ЭСП на его заряды действуют равные по модулю  $|\vec{F}_+| = |\vec{F}_-| = F$ , но противоположно направленные силы, создающие вращающий момент  $M$  (момент силы), величина которого, как видно из рисунка может быть выражена следующим образом:

$$M = (Fl/2 + Fl/2)\sin\alpha = qEl\sin\alpha = p_3 \cdot E \cdot \sin\alpha,$$

где  $p_3 = ql$  - момент диполя.

Однородное ЭСП стремится развернуть электрический диполь так, чтобы его момент  $\vec{p}_3$  был ориентирован по направлению силовых линий ЭСП. В векторной форме выражение для момента, вращающего диполь силами ЭСП, принимает следующий вид:  $\vec{M} = [\vec{p}_3 \vec{E}]$ , где вектор  $\vec{M}$  имеет направление перпендикулярное как вектору  $\vec{p}_3$ , так и вектору  $\vec{E}$ .

В неоднородном ЭСП помимо вращающего момента  $\vec{M}$  на диполь действует и ненулевая результирующая сила  $\vec{F}$ , обычно втягивающая диполь в область более сильного поля (в область поля с большей напряженностью).



$$F_{\Sigma X} = F_+ - F_- = q(E_+ - E_-) = q(dE/dx)l = p_3(dE/dx)$$

Для вычисления работы ЭСП по повороту электрического диполя воспользуемся известным из механики выражением для работы во вращательном движении:  $dA = M \cdot d\alpha$ . Подставляя в него полученное выше выражение для  $M$ , получим после преобразований:

$$dA = p_3 \cdot E \cdot \sin\alpha \, d\alpha = p_3 \cdot E \, d(\cos\alpha) = d(p_3 \cdot E \cos\alpha) = d(p_3 \cdot E) \Rightarrow A_{12} = \int p_3 \cdot E \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha$$

## **ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭСП С ДИЭЛЕКТРИКАМИ. ПОЛЯРНЫЕ И НЕПОЛЯРНЫЕ ДИЭЛЕКТРИКИ. ПОЛЯРИЗАЦИЯ. ПОЛЯРИЗОВАННОСТЬ (ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ). ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ**

К диэлектрикам относят вещества, не содержащие свободных носителей зарядов, т. е. заряженных частиц, способных под действием ЭСП перемещаться на макрорасстояния - расстояния, много большие межатомных. В диэлектрике заряженные частицы - электроны и ионы находятся в связанном в его атомах и молекулах состоянии.

В электростатическом отношении **диэлектрики** подразделяют на полярные - атомы и молекулы, которых в отсутствие внешнего ЭСП обладают ненулевым электрическим дипольным моментом и неполярные, атомы и молекулы которых в отсутствие внешнего ЭСП обладают нулевым электрическим дипольным моментом. Внешнее ЭСП способно перемещать связанные заряженные микрочастицы вещества (электроны, ионы) на микрорасстояния, соизмеримые с межатомными расстояниями ( $\sim 10^{-10}$  м). При этом в полярных диэлектриках ( $H_2O$ ,  $C_2H_5OH$ ,  $CO$ ) происходит поворот - ориентация диполей (в роли которых выступают атомы и молекулы вещества) в направлении внешнего ЭСП. Центры пространственного распределения положительного и отрицательного заряда в этих молекулах не совпадают, и в результате образуется ненулевое плечо и электрический момент диполя.

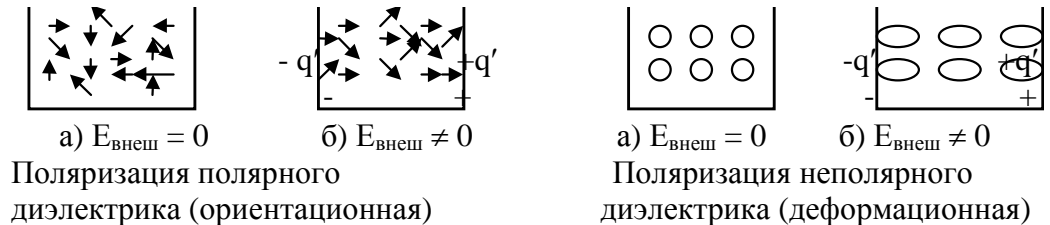
В неполярных диэлектриках ( $He$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ,  $CH_4...$ ) «центры тяжести» положительного и отрицательного зарядов молекулы в отсутствие внешнего ЭСП пространственно совпадают, и молекулы обладают нулевым электрическим дипольным моментом. Наличие же внешнего ЭСП приводит к "растаскиванию" положительного и отрицательного заряда молекулы в противоположные стороны (положительного - по полю, а отрицательного - против поля, его силовых линий). При этом возникает ненулевое плечо и электрический момент молекулы, которая превращается в диполь.

В обоих случаях, при помещении во внешнее ЭСП, как полярных, так и неполярных диэлектриков, они поляризуются, т. е. весь образец диэлектрика превращается в один большой электрический диполь (макродиполь). На противоположных гранях образца, перпендикулярных



силовым линиям ЭСП, концентрируются не скомпенсированные заряды противоположного знака; в полярных диэлектриках - в результате поворота внешним ЭСП готовых диполей-молекул, а в неполярных диэлектриках - в результате создания внешним ЭСП электрических диполей из неполярных молекул. Электрические моменты молекул ориентируются внешним ЭСП в направлении его силовых линий. Возникающие при этом на противоположных гранях образца, перпендикулярных силовым линиям внешнего ЭСП, не скомпенсированные связанные заряды противоположного знака, создают собственное ЭСП (внутреннее), дополнительное к внешнему электрическому полю, но направленное против него и ослабляющее его.

Схематически образование внутреннего ЭСП, т. е. собственно механизм поляризации в полярных и неполярных диэлектриках, иллюстрируется на рис:



Мерой поляризации диэлектрика служит вектор поляризации  $\vec{P}$ , равный электрическому дипольному моменту единицы объема диэлектрика и называемый еще поляризованностью диэлектрика: 
$$\vec{P} = \Sigma \vec{p}_i / V = n \langle \vec{p}_i \rangle$$

где:  $V$  - объем образца диэлектрика;

$\vec{p}_i$  - дипольный момент  $i$ -ой молекулы (микродиполя);

$n$  - концентрация, т. е. число молекул в единице объема диэлектрика;

$\langle \vec{p}_i \rangle$  - усредненное значение дипольного момента одной молекулы.

Можно показать, что поляризованность диэлектрика численно равна поверхностной плотности связанного заряда на гранях образца. Для однородного внешнего ЭСП и диэлектрического образца в форме цилиндра или параллелепипеда, расположенного вдоль силовых линий ЭСП, образец во внешнем ЭСП представляет собой макродиполь, электрический момент  $\vec{P}_{\Sigma}$  которого, равен:

$$\vec{P}_{\Sigma} = q' \cdot L = \sigma' SL = \sigma' \cdot V, \text{ но по определению, } P_{\Sigma} = P \cdot V \Rightarrow P = \sigma'$$

В общем случае, при произвольной форме образца, поверхностной плотности связанного заряда оказывается равна нормальной составляющая (к грани образца с  $\sigma'$ ) поляризованности диэлектрика:  $P_n = \sigma'$ .

Покажем, что однородный и изотропный диэлектрик ослабляет силу (напряженность) в  $\epsilon$  раз, где  $\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость материала.

Результирующее поле в диэлектрике складывается из противоположно направленных внешнего и внутреннего (обусловленного связанными, поляризационными зарядами) полей, и его напряженность  $E$  равна разности:  $E = E_{\text{внеш}} - E_{\text{внутр}}$ .  $E_{\text{внутр}}$  запишем по формуле для плоского конденсатора:  $E_{\text{внутр}} = \sigma' / \epsilon_0 = P / \epsilon_0$  (значение  $\epsilon$  здесь не включается, т. к. оно уже учтено в плотности  $\sigma'$  поляризационных зарядов).

Примем также, что поляризованность  $P$  диэлектрика прямо пропорциональна напряженности результирующего поля  $P = \epsilon_0 \alpha E$ , где  $\alpha$  - диэлектрическая восприимчивость материала диэлектрика. Подставляя все это в выражение для  $E$ , получаем:

$E = E_{\text{внеш}} - P / \epsilon_0 = E_{\text{внеш}} - \alpha E \Rightarrow E = E_{\text{внеш}} / (1 + \alpha) = E_{\text{внеш}} / \epsilon$ , где  $\epsilon = 1 + \alpha$  - диэлектрическая проницаемость вещества, являющаяся мерой ослабления ЭСП диэлектриком, показывающая во сколько раз напряженность ЭСП в однородном изотропном и безграничном диэлектрике меньше чем в вакууме:  $\epsilon = E_{\text{внеш}} / E$ .

В диэлектрике три вектора -  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$  и  $\vec{E}$ , по разному характеризующие силу ЭСП, (вектор  $\vec{D}$  характеризует силу ЭСП самого по себе, без учета среды, приведенного к вакууму - среде с  $\epsilon = 1$ ; вектор  $\vec{P}$  характеризует внутреннее ЭСП в диэлектрике, обусловленное его поляризационными

зарядами; вектор  $\vec{E}$  характеризует силу результирующего ЭСП в диэлектрике) взаимосвязаны следующим образом:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \alpha) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \alpha \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

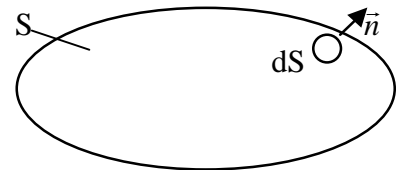
### Теорема Остроградского - Гаусса для диэлектрика. Граничные условия.

Источниками ЭСП служат как свободные (сторонние) заряды  $q$ , так и связанные заряды  $q'$  в диэлектрике. Поэтому теорема Остроградского-Гаусса для диэлектрика должна быть записана в следующем виде:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = (q + q') / \epsilon_0$$

Выразим связанный (поляризационный) заряд  $q'$  в диэлектрике через его поляризованность. Для этого, выделив мысленно в диэлектрике некоторый объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью  $S$ , найдем заряд  $dq'$ , смещенный через элементарную площадку  $d\vec{S}$  при неоднородной поляризации диэлектрика внутри объема  $V$ ;

$dq' = \sigma' dS = - P_n dS$ . Знак "минус" указывает на поступление заряда внутрь объема  $V$ , т. е. в направлении противоположном внешней нормали  $\vec{n}$  к площадке  $d\vec{S}$ . Через всю поверхность  $S$  внутрь объема  $V$  при поляризации диэлектрика поступает заряд  $q' = \oint_S P_n dS$ .



Подставляя это выражение в формулу теоремы Остроградского-Гаусса, после преобразований получаем:

$$\oint_S E_n dS = q / \epsilon_0 - \oint_S P_n dS / \epsilon_0 \Rightarrow \oint_S (\epsilon_0 E_n + P_n) = q \Rightarrow \boxed{\oint_S D_n dS = q}$$

Поток вектора электрического  $\vec{D}$  смещения через любую замкнутую поверхность не зависит ни от размера, ни от формы поверхности, а определяется лишь суммарным свободным сторонним зарядом, находящимся внутри замкнутой поверхности, будучи численно равным этому заряду. В этом заключается суть теоремы Остроградского-Гаусса для диэлектрика. Этим, в основном и оправдывается введение дополнительного (вспомогательного) вектора  $\vec{D}$ , облегчающего расчет вектора  $\vec{E}$  в диэлектрических и особенно неоднородных средах и связанном с ним следующим соотношением:  $D_n = \epsilon_0 E_n + P_n$  или  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$

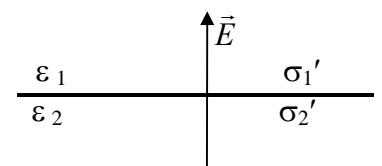
В неоднородных средах эффективным средством расчета характеристик ЭСП служат так называемые граничные условия, накладываемые на нормальную и тангенциальную проекции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$  к границе раздела двух диэлектриков с разными значениями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  диэлектрической проницаемости.

Граничные условия являются следствием, конкретизацией основных уравнений - теорем ЭСП - теоремы Остроградского - Гаусса (теоремы о потоке вектора  $\vec{E}$  или  $\vec{D}$ ) и теоремы о циркуляции вектора  $\vec{E}$  применительно к границе раздела двух диэлектриков. На такой границе появляются связанные заряды, создающие дополнительное к внешнему, внутреннее ЭСП, нормальное к границе раздела. Касательная же составляющая напряженности результирующего ЭСП на границе раздела двух сред остается неизменной, т. е.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \Rightarrow (\text{т. к. } D_{1\tau} / \epsilon_0 \epsilon_1 = D_{2\tau} / \epsilon_0 \epsilon_2)$$

Если на границе раздела нет свободных зарядов, то, в силу теоремы Остроградского - Гаусса, неизменной остается нормальная составляющая вектора  $\vec{D}$ , т. е.

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_0 \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_{2n} \Rightarrow E_{1n} / E_{2n} = \epsilon_2 / \epsilon_1$$



Полученные формулы по известным значениям диэлектрических проницаемостей двух сред и известным характеристикам ЭСП в какой-либо среде позволяют рассчитывать характеристики ЭСП в другой среде.

## Взаимодействие ЭСП с проводящими средами.

В диэлектриках заряженные микрочастицы (электроны и ионы) связаны в молекулах и атомах вещества и способны под действием внешнего ЭСП перемещаться лишь на микрорасстояния (в пределах внутримолекулярных расстояний). В проводниках имеются свободные заряженные микрочастицы, способные под действием ЭСП перемещаться на макрорасстояния (в пределах всего образца). При приложении внешнего ЭСП, его силы, действуя в противоположных направлениях на свободные микрочастицы разного знака, приводят к накоплению на противоположных гранях образца проводника зарядов противоположного знака, создающих, как и в диэлектрике, внутреннее ЭСП, направленное противоположно внешнему. Это явление разделения разноименных свободных зарядов в проводнике внешним ЭСП называется **электростатическая индукция**.

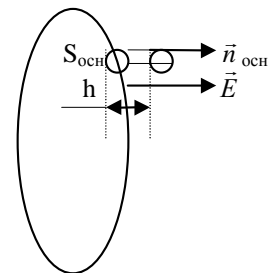
Большая свобода перемещения заряженных микрочастиц в проводниках приводит к тому, что в стационарном состоянии, когда после включения внешнего ЭСП перемещения зарядов прекратились, внутреннее ЭСП сравнивается по своей силе с внешним и полностью компенсирует его. Таким образом, ЭСП внутри проводника всегда равно нулю (в стационарном, установившемся состоянии), иначе, наличие поля привело бы к дальнейшему перемещению зарядов, что означало бы отсутствие установившегося состояния равновесия. Поскольку напряженность есть градиент, пространственная производная потенциала, равенство ее нулю означает отсутствие изменения потенциала в пространстве, или, иначе говоря, эквипотенциальность всех точек проводника. Эквипотенциальной оказывается, в частности, и поверхность проводника. Поскольку же в электростатическом поле силовые линии всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям, проводник "деформирует" внешнее ЭСП так, что его силовые линии должны "входить" в проводник перпендикулярно его поверхности.

Если проводник электризовать, т. е. сообщить ему каким-либо образом избыточный (не скомпенсированный) заряд одного знака, например, трением, облучением, нагревом, то, вследствие взаимного отталкивания избыточные одноименно заряженные микрочастицы вытолкнутся на поверхность образца. В установившемся, стационарном состоянии, когда все перемещения зарядов внутри проводника после его зарядки завершились, напряженность ЭСП внутри заряженного проводника должна быть равной нулю (иначе, действовала бы сила, приводящая в движение свободные заряды в проводнике), а все его точки будут эквипотенциальными. Соответственно, на образце проводника силовые линии ЭСП должны быть перпендикулярны его поверхности, которая является эквипотенциальной. Численное же значение напряженности ЭСП, создаваемого заряженным проводником вблизи его поверхности можно рассчитать с помощью теоремы Остроградского-Гаусса. В качестве замкнутой поверхности, через которую вычисляется поток вектора  $\vec{E}$  здесь целесообразно выбрать цилиндр малой высоты, ось которого перпендикулярна к поверхности проводника. Т. к. силовые линии ЭСП перпендикулярны к поверхности проводника, то их поток через боковую поверхность цилиндра будет равен нулю. Нулю равен поток  $\vec{E}$  и через внутреннее основание цилиндра, т. к. внутри проводника  $E = 0$ . Поэтому остается поток вектора  $\vec{E}$  через одно - наружное основание цилиндра, который, в соответствии с теоремой Остроградского - Гаусса, равен суммарному заряду, находящемуся внутри цилиндра:

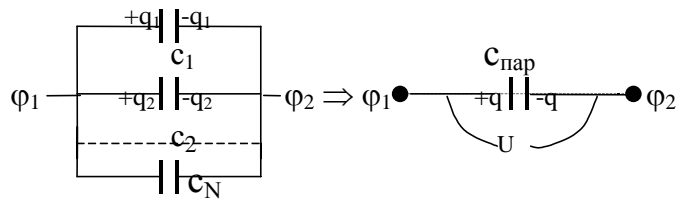
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E \cdot S_{\text{осн}} = q_{\Sigma} / \epsilon_0 = \sigma \cdot S_{\text{осн}} / \epsilon_0 \Rightarrow \boxed{E = \sigma / \epsilon_0}$$

Напряженность ЭСП заряженного проводника вблизи его поверхности определяется, как и для заряженной бесконечной плоскости, поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ . Но у плоскости поле было в 2 раза слабее, т. к. ее силовые линии рассеивались в обе стороны, в то время как у заряженного проводника в одну - наружную.

Напряженность ЭСП вблизи поверхности заряженного проводника оказывается выше там, где больше кривизна поверхности участков его поверхности (на остриях, углах, изломах). Там происходит резкое изменение направления  $\vec{E}$ , которое требует повышенной плотности заряда, проявляющей себя в сгущении силовых линий ЭСП.



## Електроёмкость проводника. Конденсаторы.



Потенциал  $\varphi$ , приобретаемый уединенным проводником при сообщении

ему заряда  $q$ , прямо пропорционален заряду  $q$  (для  $\varphi_\infty = 0$ ) и зависит от размеров и формы проводника, а также от окружающих его тел и полей (электрических). Отношение же  $C = q/\varphi$ , не зависит ни от заряда  $q$ , ни от потенциала  $\varphi$  и характеризует электрические свойства самого проводника, его способность (называемую электроёмкостью, или просто ёмкостью) удерживать (накапливать) определенный заряд при заданном потенциале, или - **способность поддерживать постоянным определенное отношение заряда на проводнике к его потенциалу**. Единицей электроёмкости является фарад:  $1\text{Ф} = 1\text{Кл}/1\text{В}$ .

Для сферического проводника радиусом  $R$  и зарядом  $q$  потенциал  $\varphi$  равен:  $\varphi = kq/R$  и ёмкость  $C = q/\varphi = q/(kq/R) = R/k = 4\pi\epsilon_0 R$ .

Для устранения зависимости электроёмкости от окружающих тел и электрических полей и накопления значительных зарядов применяют устройства в виде системы проводников, называемые конденсаторами. Простейший тип конденсатора состоит из двух проводников (называемых электродами или обкладками), разделенных диэлектриком. В зависимости от конфигурации электродов различают плоские, сферические, цилиндрические конденсаторы, концентрирующие все ЭСП между своими обкладками. Ёмкость конденсатора определяется как отношение заряда  $q$  одной из его разноименно заряженных обкладок, к разности потенциалов между ними:

$$C = q/(\varphi_2 - \varphi_1) = q/\Delta\varphi$$

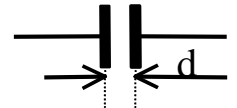
Она характеризует **способность конденсатора поддерживать постоянным определенное отношение заряда на ободках к разности потенциалов между ними**.

Отсутствие влияния внешних тел и электрических полей на ёмкость конденсатора, т. е. на отношение  $q/\Delta\varphi$  объясняется тем, что все ЭСП конденсатора (его разноименно заряженных пластин) сосредоточено внутри него, между его обкладками и заэкранировано ими. Снаружи поля конденсатора нет и поэтому он "безразличен" к наличию или присутствию внешних тел или полей. Ранее, при применении теоремы Остроградского-Гаусса для вычисления напряженности ЭСП двух разноименно заряженных пластин, уже было получено выражение для электроёмкости плоского конденсатора:  $C = \epsilon_0\epsilon S/d$

где  $S$  - площадь одной обкладки (пластины) конденсатора;

$d$  - расстояние между обкладками конденсатора;

$\epsilon$  - диэлектрическая проницаемость среды между обкладками.



У конденсатора с большей диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  диэлектрика между обкладками ёмкость больше потому, что диэлектрик ослабляет в  $\epsilon$  раз напряженность ЭСП, а соответственно и разность потенциалов  $\Delta\varphi = Ed$  между обкладками при неизменном заряде  $q$  на них.

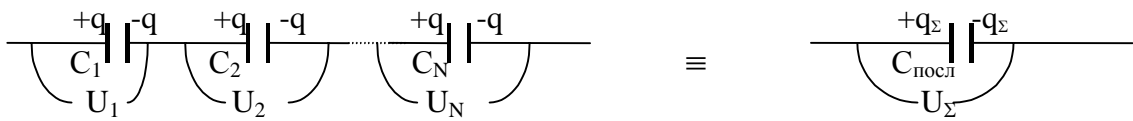
У конденсатора с большей площадью обкладок ёмкость больше потому, что при одинаковом их заряде поверхностная плотность  $\sigma = q/S$ , а, соответственно и напряженность  $E = \sigma/\epsilon_0\epsilon$  и разность потенциалов  $\Delta\varphi = Ed$  между обкладками меньше, то есть отношение  $q/\Delta\varphi = C$  - больше.

С увеличением расстояния  $d$  между обкладками ёмкость  $C$  конденсатора уменьшается (при прочих одинаковых характеристиках) потому, что при одинаковом заряде  $q$  на обкладках и, соответственно, при одинаковой плотности заряда  $\sigma = q/S$  и напряженности  $E = \sigma/\epsilon_0\epsilon$ , разность потенциалов  $\Delta\varphi = Ed$  между обкладками, а соответственно и отношение  $C = q/\Delta\varphi$  обратно пропорциональны расстоянию  $d$ .

На практике в целях получения необходимой электроёмкости (и рабочего напряжения) конденсаторы часто соединяют в батареи с последовательным и/или параллельным соединением.

При параллельном соединении на каждом из конденсаторов одинакова разность потенциалов  $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi = \text{const}$ , а полный заряд  $q_\Sigma$  батареи равен сумме  $\Sigma q_i$  зарядов на каждом из конденсаторов. Результирующая ёмкость параллельного соединения  $N$  конденсаторов равна:  $C = q_\Sigma/\Delta\varphi_\Sigma = \Sigma q_i/\Delta\varphi_i = q_1/\Delta\varphi + q_2/\Delta\varphi + \dots + q_N/\Delta\varphi = \boxed{C_1 + C_2 + \dots + C_N = \Sigma C_i}$  - результирующая ёмкость равна сумме ёмкостей, составляющих батарею конденсаторов.

При последовательном соединении конденсаторов одинаковым является заряд  $q_1 = q = q_\Sigma$  на каждом из конденсаторов, а результирующая разность потенциалов  $\Delta\varphi_\Sigma$  равна сумме  $\Sigma\Delta\varphi_i$  разностей потенциалов на каждом из конденсаторов. И результирующая емкость батареи из  $N$  последовательного соединенных конденсаторов будет равна:



$$C_{\text{посл}} = q_\Sigma / \Delta\varphi_\Sigma = q_i / \Sigma\Delta\varphi_i = q / (\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2 + \dots + \Delta\varphi_N) = 1 / (\Delta\varphi_1/q + \Delta\varphi_2/q + \dots + \Delta\varphi_N/q) = 1 / (1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N) = 1 / (\Sigma 1/C_i) \Rightarrow \boxed{1/C_{\text{посл}} = \Sigma(1/C_i)}$$

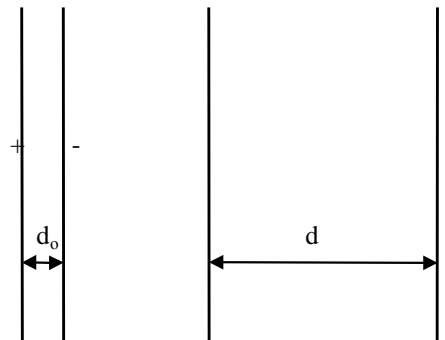
- результирующая обратная емкость  $1/C_{\text{посл}}$  последовательного соединения конденсаторов равна сумме  $\Sigma(1/C_i)$  обратных емкостей, составляющих батарею конденсаторов.

Для простейшей батареи из двух конденсаторов  $C_{\text{посл}} = C_1 \cdot C_2 / (C_1 + C_2)$ .

### Энергия ЭСП заряженного конденсатора и проводника. Объемная плотность энергии ЭСП.

Электрическое поле, являясь видом материи, обладает энергией - универсальной мерой движения и взаимодействия. Получим выражение для энергии ЭСП на примере заряженного конденсатора (отключенного от источника питания).

Рассмотрим мысленный опыт по раздвижению пластин конденсатора до расстояния  $d$  много большего первоначального  $d_0$ . Работа  $A_{12}$  по преодолению сил взаимного притяжения разноименно заряженных пластин конденсатора и даст нам меру изменения энергии  $\Delta W_3$ , а фактически - конечное значение энергии  $W_3$  ЭСП конденсатора, т. к. начальное значение энергии  $W_{30}$  много меньше конечного и им можно пренебречь.



$$\Delta W_3 = W_3 - W_0 \approx W_3 = A_{12} = F(d - d_0) \approx Fd = q_1 E_2 d =$$

$$= \sigma S d / 2 \epsilon_0 \epsilon = (\sigma^2 S^2) / (2 \epsilon_0 \epsilon S / d) = q^2 / 2C = q \cdot \Delta\varphi / 2 = C(\Delta\varphi)^2 / 2 ;$$

$$\boxed{W_3 = q^2 / 2C = q \cdot \Delta\varphi / 2 = C(\Delta\varphi)^2 / 2}$$

В качестве силы  $F$  взята сила, действующая со стороны одной пластины (ее поля) на другую. Работа по раздвижению пластин пошла на увеличение энергии ЭСП конденсатора; эта энергия сосредоточена в пространстве между пластинами конденсатора, т. е. в объеме  $V = S \cdot d$ .

Объемная плотность энергии ЭСП, т. е. энергия, приходящаяся на единицу объема, равна:

$$\omega_3 = W_3 / V = q^2 / 2CV = \sigma^2 S^2 d / (2 \epsilon_0 \epsilon S V) = \sigma^2 S^2 d / (2 \epsilon_0 \epsilon S S d) = \sigma^2 / 2 \epsilon_0 \epsilon = \boxed{\epsilon_0 \epsilon E^2 / 2}$$

Материальным носителем энергии заряженного конденсатора является не конденсатор непосредственно и не заряды на нем, а его электрическое поле, заполняющее пространство объемом  $V = S \cdot d$  внутри конденсатора и распределенное в нем с объемной плотностью  $\omega_3 = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2$  [Дж/м<sup>3</sup>]

Энергия ЭСП заряженных проводников выражается аналогичной заряженному конденсатору формулой:  $\boxed{W_3 = C \cdot \varphi^2 / 2}$  и также распределена в пространстве с объемной плотностью

$$\boxed{\omega_3 = \epsilon_0 \epsilon E^2 / 2}$$

Так как конденсатор - система двух проводников с зарядами  $q_1 = q$  и  $q_2 = -q$  и потенциалами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то электрическая энергия этой системы может быть представлена в следующем виде:

$$W_3 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\varphi_1 / 2 - q\varphi_2 / 2 = q_1\varphi_1 / 2 + q_2\varphi_2 / 2 = (1/2)(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)$$

Для системы из  $N$  неподвижных заряженных проводников электрическая энергия будет равна:  $\boxed{W_3 = \Sigma q_i \varphi_i / 2}$ .

## ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Электрический ток является одним из наиболее распространенных источников магнитного поля, поэтому, прежде чем переходить к изучению магнитного поля, целесообразно изучить основные характеристики и законы электрического тока. Кроме того, эффекты, связанные с электрическим током, чрезвычайно широко используются в современной электро- и радиотехнике.

### Основные характеристики и законы постоянного тока

При приложении к проводнику постоянной разности потенциалов в нем возникает под действием сил ЭСП уравнивающий поток заряженных микрочастиц, который и называется электрическим током.

Количественными характеристиками, мерами этого потока являются:

1) скалярная и интегральная по площади поперечного сечения **быстрота переноса заряда**, называемая **силой тока**:  $I = dq/dt$  или, для постоянного тока,  $I = q/t$  [Кл/с = 1А]. Сила тока представляет собой поток заряда в проводнике, т. е. численно равна заряду, переносимому через поперечное сечение проводника за единицу времени.

2) векторная и локальная (дифференциальная) по площади поперечного сечения проводника быстрота переноса заряда, называемая плотностью тока:

$$j = I/S_{\perp} \text{ [1А/1м}^2\text{]} - \text{поверхностная плотность потока заряда.}$$

Опытным путем были установлены **два основных закона постоянного тока** для однородного (не содержащего источников тока) участка цепи:

1) **Закон Ома**: При приложении к однородному участку цепи разности потенциалов  $\Delta\phi$  в нем возникает электрический ток, сила  $I$  которого прямо пропорциональна  $\Delta\phi$  и зависит от свойств проводящего участка цепи - его материала и размеров.  $I = G\Delta\phi$ , где коэффициент пропорциональности  $G$  зависит от свойств участка цепи и называется его электропроводностью. На практике чаще используют обратную электропроводности величину

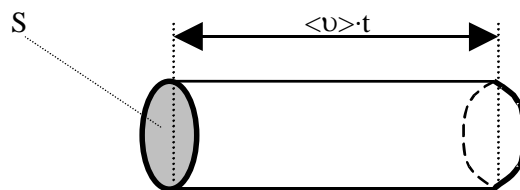
$R = 1/G$ , называемую электросопротивлением (или просто – **сопротивлением**) участка цепи. Тогда закон Ома запишется в виде:  $I = \Delta\phi / R$  - сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна разности потенциалов на его концах и обратно пропорциональна сопротивлению участка цепи. Из закона Ома выражается и получает интерпретацию одно из важнейших понятий учения об электрическом токе - понятие **электросопротивления**:

$$R = \Delta\phi / I \quad [1В/1А = 1 Ом].$$

Электросопротивление однородного участка цепи, вследствие прямо пропорциональной зависимости между силой тока  $I$  и разностью потенциалов  $\Delta\phi$ , не зависит ни от  $I$ , ни от  $\Delta\phi$ , а определяется лишь их отношением. Сопротивление участка цепи и есть способность его поддерживать постоянным определенное отношение между разностью потенциалов на его концах и силой тока, протекающего через него. Сопротивлением эта величина названа потому, что без противодействия направленному потоку заряженных частиц постоянная разность потенциалов, а, соответственно и постоянная напряженность, т. е. сила, действующая на заряженные частицы, приводили бы к непрерывному возрастанию их скорости и, соответственно - силы тока, чего не бывает на практике. В основе физического механизма ограничения скорости носителей заряда в металлическом проводнике лежит, как показано будет ниже в классической теории электропроводности металлов, рассеяние ускоряемых электрическим полем носителей заряда - электронов на разного рода несовершенствах состава и структуры материала (тепловых колебаниях узлов кристаллической решетки, примесях, вакансиях и т. п.).

Наряду с приведенной выше так называемой интегральной формой закона Ома, существует еще и дифференциальная форма закона Ома. Для ее получения подставим в выражение для сопротивления вместо интегральных характеристик - разности потенциалов и силы тока, дифференциальные - напряженность и плотность тока:

$$R = \Delta\phi / I = El / jS = \rho l / S, \quad \text{где } \rho = E / j \text{ или } \boxed{I = E / j}$$



Отношение напряженности в проводнике к плотности тока в нем есть величина постоянная, зависящая лишь от свойств проводника и называемая его удельным электросопротивлением. Удельным сопротивлением называют сопротивление проводника единичных размеров (единичной длины и площади поперечного сечения).

Это следует из выражения для электросопротивления однородного проводника:  $R = \rho l/S \Rightarrow \rho = RS/l$  [ $\text{Ом}\cdot\text{м}^2 = \text{Ом}\cdot\text{м}$ ]  $\Rightarrow \rho = R$  при  $l = 1 \text{ м}$  и  $S = 1 \text{ м}^2$ .

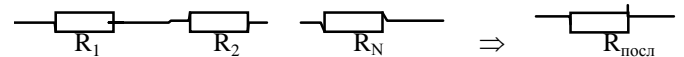
Сопротивление однородного проводника  $R = \rho l/S$  прямо пропорционально его длине, обратно пропорционально площади поперечного сечения и зависит от рода материала, соответствующей характеристикой которого является его удельное электросопротивление  $\rho$ . У более длинного проводника при одинаковой разности потенциалов на концах меньше напряженность ЭСП  $E = \Delta\phi/l$ , а значит и сила  $F = qE$ , действующая на носители тока в проводнике. Меньшая сила сообщает им меньшее ускорение и, соответственно, меньшую среднюю скорость, а, значит, за единицу времени в длинном проводнике пройдет меньший заряд, т. е. ток  $I$  меньшей силы. Итак, в длинном проводнике, при той же разности потенциалов на концах, отношение  $R = \Delta\phi/I$ , которое и выражает собой электросопротивление проводника (участка цепи), больше чем в коротком. У более толстого проводника (проводника с большей площадью поперечного сечения) при одинаковой с тонким проводником разности потенциалов одинаковой будет напряженность ЭСП внутри проводника и сила, действующая на носители тока. Последние, будут двигаться с одинаковым ускорением и одинаковой средней скоростью в обоих проводниках, т. е. обеспечат одинаковую плотность тока - заряд, переносимый за единицу времени через единицу площади поперечного сечения. Сила же тока  $I = I \cdot S$  в толстом проводнике больше чем в тонком и, значит отношение  $R = \Delta\phi/I$ , т. е. сопротивление, у толстого проводника меньше, чем у тонкого проводника.

Физический механизм влияния  $\rho$  на сопротивление проводника заключается в рассеянии носителей тока на разного рода несовершенствах состава и структуры материала, которое ограничивает возрастание скорости носителей тока и определяет тем самым среднюю их скорость, а вместе с ней и силу тока (при фиксированной разности потенциалов).

В электро- и радиотехнике часто приходится иметь дело с последовательным, или параллельным соединением участков цепи, обладающих сопротивлением; их называют **резисторами**. Получим формулы для расчета результирующего электросопротивления соединения  $N$  резисторов:

**а) при последовательном соединении**

(в цепочку, один за другим) через все

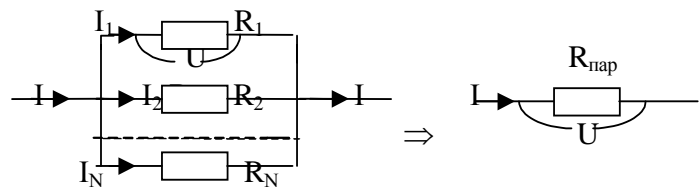


резисторы протекает один и тот же ток  $I$ ,

а результирующая разность потенциалов  $\Delta\phi_{\Sigma}$  равна сумме  $\Sigma\Delta\phi_i$  на каждом из них:

$R_{\text{послед}} = \Delta\phi_{\Sigma}/I = (\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \dots + \Delta\phi_N)/I = \Delta\phi_1/I + \Delta\phi_2/I + \dots + \Delta\phi_N/I = R_1 + R_2 + R_N = \Sigma R_i$  - **результирующее сопротивление равно сумме сопротивлений последовательно соединенных резисторов.**

**б) при параллельном соединении**  $N$  резисторов одинаковой является разность потенциалов  $(\phi_1 - \phi_2)$  на каждом из них, а результирующий ток  $I_{\Sigma}$  равен сумме  $\Sigma I_i$  токов, протекающих через каждый из резисторов.



$$R_{\text{пар}} = (\phi_1 - \phi_2)/I_{\Sigma} = (\phi_1 - \phi_2)/(I_1 + I_2 + I_N) = 1/(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_N) \Rightarrow 1/R_{\text{пар}} = \Sigma 1/R_i$$

- при параллельном соединении резисторов **суммируются их обратные сопротивления.**

(у конденсаторов было наоборот)

**2) Закон Джоуля - Ленца:** При прохождении по однородному участку цепи с сопротивлением  $R$  электрического тока силой  $I$  на участке цепи за время  $t$  выделяется теплота  $Q$ , пропорциональная квадрату силы тока, сопротивлению участка цепи и времени прохождения тока:  $Q = I^2 R t$ .

Иногда закон Джоуля - Ленца записывают для мощности электрического тока, выделяющейся в виде теплоты на участке цепи (на его сопротивлении):

$$P = Q/t = I^2 R = I \Delta\varphi = (\Delta\varphi)^2 / R \quad [\text{Дж/с} = \text{Вт}]$$

Формально закон Джоуля - Ленца может быть получен как следствие закона Ома: при переносе заряда  $q$  за время  $t$  по участку цепи с разностью потенциалов  $\Delta\varphi = IR$  совершается работа равная:  $A = q \Delta\varphi = I^2 R t$ , которая и идет на нагрев участка цепи, т. е. выделяется в виде тепла (если участок цепи неподвижен).

Наряду с приведенной выше интегральной формой закон Джоуля - Ленца имеет, как и закон Ома и дифференциальную форму, справедливую локально, т. е. в точке (в физически бесконечно малом объеме): ее можно получить из интегральной формы, заменяя в ней интегральные характеристики -  $I$ ,  $R$  и  $\Delta\varphi$  на соответствующие дифференциальные -  $j$ ,  $\rho$ , и  $E$ :

$$P = I^2 R = (j S)^2 \cdot \rho l / S = j^2 \rho S l = j^2 \rho V \Rightarrow \boxed{P_{\text{уд}} = P/V = j^2 \rho = E^2 / \rho}$$

**Общность законов Ома и Джоуля - Ленца имеет не только формальные, но и глубокие содержательные основания.** Закон Ома отражает особенности взаимодействия потока заряженных частиц с материалом проводника со стороны ограничения скорости потока заряженных и ускоренных электрическим полем частиц, а закон Джоуля - Ленца отражает это взаимодействие со стороны передачи энергии ускоренных электрическим полем заряженных частиц, материалу проводника.

Рассмотрим физику процессов, обуславливающих электросопротивление и джоулев нагрев в металлах и выведем закон Ома и закон Джоуля - Ленца. Металлы - вещества, имеющие кристаллическую структуру; в узлах их кристаллической решетки находятся положительно заряженные ионы, совершающие хаотические тепловые колебания вокруг положений равновесия, а в пространстве между ионами сравнительно свободно перемещаются отрицательно заряженные электроны, образующие своего рода электронный газ, подчиняющийся статистике Максвелла - Больцмана.

При наложении внешнего электрического поля с напряженностью  $\vec{E}$  на электрон действует сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ , сообщающая ему ускорение  $a = \vec{F}/m = q\vec{E}/m$ . Фактором, ограничивающим рост скорости электронов и ответственным как за электросопротивление (электрическое трение, торможение), так и за джоулев нагрев проводника электрическим полем, является рассеяние электронов (являющихся носителями тока в металлах) на разного рода дефектах, несовершенствах материала (хаотических колеблющихся ионах, примесях, вакансиях и т. п.). В результате такого рассеяния и осуществляется "сброс" скорости и кинетической энергии с ускоренных электрическим полем электронов. Электроны при этом тормозятся, материал же, оказывая сопротивление их потоку, и принимая на себя энергию движения электронов, повышает свою внутреннюю энергию, т.е. нагревается.

Усредненный характер зависимости скорости электронов от времени можно изобразить в виде пилообразного графика.

Скорость электрона ускоренного приложенным к проводнику электрическим полем линейно возрастает до тех пор, пока электрон не "столкнется" с какого-либо рода неоднородностью кристалла, не рассеется на ней и не потеряет своей скорости и кинетической энергии. Статистически усредненное время свободного пробега (от соударения до следующего соударения) обозначено за  $\tau$ .

В среднем можно считать, что электрон движется со скоростью  $\langle v \rangle = v_{\text{макс}}/2$ .

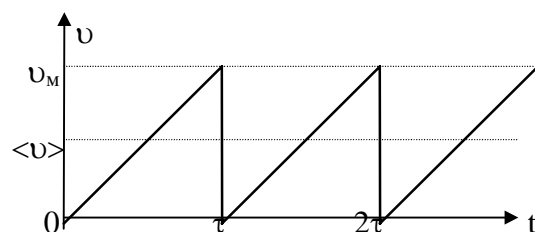
Так как  $v_{\text{макс}} = a\tau = qE\tau/m$ , то  $\langle v \rangle = qE\tau/2m$ .

При перемещении с такой средней скоростью, через поперечное сечение  $S$  проводника за время  $t$  пройдет число  $N$  носителей, содержащееся в объеме проводника  $V = S\langle v \rangle t$ .

$N = nV$ , где  $n$  - концентрация носителей (число их в единице объема). Они перенесут заряд  $q_{\Sigma} = q \cdot N = qnV = qn \langle v \rangle St$ . Заряд же переносимый через единицу площади поперечного сечения за единицу времени, т. е. плотность тока, равна:

$$j = q_{\Sigma}/St = qn \langle v \rangle = qnqE\tau/2m = (nq^2\tau/2m)E = \gamma E = E/\rho,$$

где коэффициент пропорциональности между плотностью тока и напряженностью  $E$  есть удельная электропроводность  $\gamma$  или обратное ей удельное электросопротивление  $1/\rho$ :  $\gamma = 1/\rho = nq^2\tau/2m$ .





Полученная связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля и представляет **закон Ома в дифференциальной форме**:  $j = \gamma E = E/\rho$ .

Для получения **закона Джоуля - Ленца в дифференциальной форме**, рассмотрим механизм нагрева проводника электрическим током. Такой нагрев, как правило, осуществляется в результате столкновений (рассеяний) электронов с хаотически колеблющимися ионами в узлах кристаллической решетки, которым электроны и передают (сбрасывают на них) накопленную в ускоряющем их электрическом поле кинетическую энергию  $mv_{\text{макс}}^2/2$ . Электроны здесь играют роль своеобразного трансформатора; воспринимая энергию электрического поля в виде своей кинетической энергии, они затем передают ее при соударениях на увеличение амплитуды и соответственно энергии тепловых хаотических колебаний ионов в узлах решетки.

За единицу времени один электрон столкнется  $1/\tau$  раз и передаст решетке энергию  $(mv_{\text{макс}}^2/2)(1/\tau)$ . Единице же объема будет передана (выделена) энергия:  $P_{\text{уд}} = nmv_{\text{макс}}^2/2\tau$ .

Подставляя в это выражение  $v_{\text{макс}} = at = qEt/m$ , получаем:

$P_{\text{уд}} = nmv_{\text{макс}}^2/2\tau = nm(qEt)^2/2\tau m^2 = (nq^2\tau/2m)E^2 = \gamma E^2 = E^2/\rho$ , т. е. закон Джоуля - Ленца  $P_{\text{уд}} = \gamma E^2 = E^2/\rho$  - в дифференциальной форме.

### Сторонние силы. Электродвижущая сила. Закон Ома для неоднородного участка цепи и для замкнутой цепи. ЭДС, напряжение и разность потенциалов.

Для поддержания непрерывного протекания тока в проводнике необходима замкнутая цепь и наличие в ней источника тока, в котором бы за счет работы сил неэлектростатической природы (механических, электромагнитных и др.), называемых *сторонними*, происходил перенос положительного заряда в направлении возрастания потенциала, и поддерживалась бы постоянная разность потенциалов на полюсах источника тока.

Электростатические силы являются консервативными; их работа по замкнутому контуру всегда равна нулю и они переносят заряд (положительный) только в направлении убыли потенциала, стремясь соединить разноименные заряды и уничтожить имеющуюся разность потенциалов.

В замкнутой электрической цепи на внешнем (по отношению к источнику тока) участке работают электростатические силы, направленные (вектор  $\vec{E}$ ) в сторону понижения потенциала; их энергетической характеристикой служит разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$ , равная их работе  $A_{12}$ , отнесенной к величине перенесенного заряда  $q$ :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = A_{12}/q$$

За энергетическую характеристику сторонних сил принимают величину  $\varepsilon$ , называемую электродвижущей силой и равную отношению работы  $A^*$  сторонних сил по перемещению заряда  $q$  внутри источника тока (или по всей замкнутой цепи, т. к. во внешней цепи сами сторонние силы и их работа равны нулю) к величине этого заряда, т. е.

$$\boxed{\varepsilon = A^*/q} \quad [\text{Дж/Кл} = \text{В}]$$

На неоднородном участке цепи (содержащем источник тока) в общем случае могут работать и сторонние, и электростатические силы, общая работа которых по перемещению через участок заряда  $q$  равна:

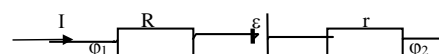
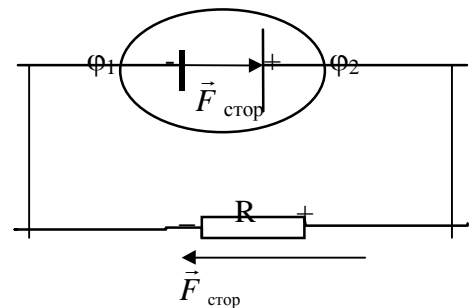
$$A_{12} = A_{12} + A^* = \int \vec{F}_{\text{эл.ст.}} d\vec{l} + \int \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = \int q \vec{E}_{\text{эл.ст.}} d\vec{l} + \int q \vec{E}_{\text{стор}} d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12}$$

**Работа по перемещению единичного положительного заряда через неоднородный участок цепи называется напряжением  $U$**  на данном участке цепи, и оно равно алгебраической сумме ЭДС и разности потенциалов на данном участке цепи:

$$U = A_{12}/q = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}$$

Если для однородного участка цепи (где отсутствует источник тока, и работают только электростатические силы) закон Ома имел вид:  $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/R_{12}$ , то для неоднородного участка его естественным обобщением будет:

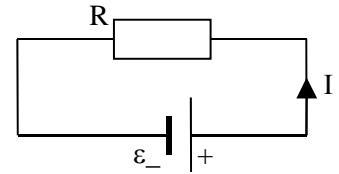
$$I = \{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}\}/R_{12} = U/R_{12},$$



где  $R_{12} = R + r$  и  $r$  - **внутреннее сопротивление** источника тока. Оно равно отношению ЭДС  $\varepsilon$  к току короткого замыкания (току, при внешнем сопротивлении  $R = 0$ ).

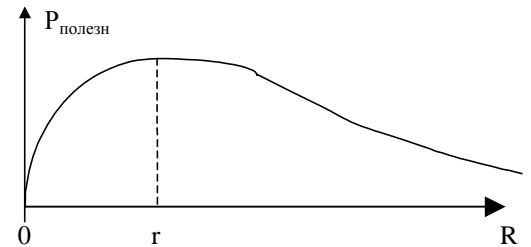
Если участок цепи, содержащий источник тока замкнут на внешнее сопротивление (сопротивление нагрузки), т. е.  $\varphi_1 = \varphi_2$  и  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ , то **закон Ома для участка цепи, содержащего источник тока**, примет следующий вид:

$$I = \varepsilon_{12}/R_{12} = \varepsilon/(R + r)$$



**Полезная мощность, отдаваемая источником тока во внешнюю цепь (нагрузку)**  $P_{\text{полез}} = I^2 R$ , в зависимости от сопротивления  $R$  нагрузки, изображается кривой с максимумом при  $R = r$ . Действительно, при малых  $R$ , много меньших сопротивления  $r$  источника тока, сила тока в цепи  $I = \varepsilon/(R + r) \cong \varepsilon/r$  не зависит от  $R$ , а полезная мощность  $P_{\text{полез}} = I^2 R \cong \varepsilon^2 R/r^2$  прямо пропорциональна  $R$ .

При больших  $R$ , много больших сопротивления источника тока ( $R \gg r$ ), и сила тока в цепи  $I = \varepsilon/(R + r) \cong \varepsilon/R$ , и полезная мощность  $P_{\text{полез}} = I^2 R \cong \varepsilon^2 R/R^2 = \varepsilon^2/R$  - обратно пропорциональны  $R$ . Таким образом, при малых значениях  $R$  полезная мощность  $P_{\text{полез}}$  возрастает с ростом  $R$ , а при больших  $R$  - убывает, т. е. в зависимости от сопротивления нагрузки полезная мощность изображается кривой с максимумом. То, что максимум этой зависимости приходится на значение сопротивления  $R$  нагрузки, равное сопротивлению  $r$  источника тока, можно показать, исследуя зависимость  $P_{\text{полез}}(R)$  на экстремум:  $P_{\text{полез}}(R) = 0$  при  $R = r$ .



Режим, при котором источник тока отдает в нагрузку наибольшую мощность, называется **режим согласования источника тока с нагрузкой**. Коэффициент же полезного действия источника, равный отношению полезной мощности

(потребляемой в нагрузке) к полной мощности, отдаваемой источником:

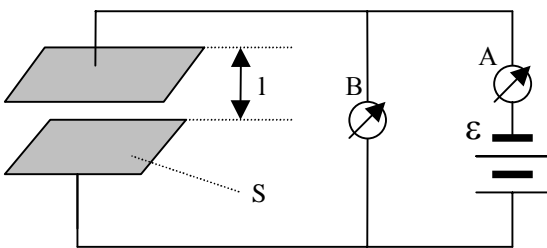
$$\eta = P_{\text{полез}}/P_{\text{полн}} = I^2 R / I^2 (R + r) = R/(R + r)$$

монотонно возрастает с ростом  $R$  от нуля (при  $R = 0$ ) до 1 (при  $R \gg r$ ).

## Электрический ток в газах. Вольтамперная характеристика (ВАХ) газового разряда и ее физический анализ. Виды электрического разряда в газе.

В обычном состоянии газы не проводят электрический ток, ибо состоят из электрически нейтральных атомов и молекул. Однако такие внешние воздействия, как нагрев, облучение ультрафиолетовыми лучами или потоком заряженных частиц, могут вызывать ионизацию атомов и молекул газа, то есть отрыв электрона от них, и создавать свободные носители заряда - электроны и ионы. Электроны обладают способностью «прилипания» к нейтральным молекулам газа с образованием отрицательных ионов<sup>2</sup>.

При наличии внешнего ионизатора и при приложении электрического поля в газе протекает электрический ток. Протекание тока в газе называется электрическим разрядом. Этот разряд называется **несамостоятельным**, если прекращается при выключении внешнего ионизатора. Но он может перейти в **самостоятельный разряд**, если увеличить напряжение  $U$ , приложенное набирает в электрическом поле кинетическую энергию  $W_k = q_e U = q_e E l$  (где  $l$  - длина свободного пробега электрона в газе), сравнимую с энергией ионизации атома (молекулы), с энергией связи электрона в атоме. При столкновениях такого "энергичного" электрона с атомом или молекулой газа, электрон передаёт им свою энергию и отрывает от них другой электрон, ионизируя их, превращая в положительный ион. Так возникает поэтапное наращивание, умножение числа носителей тока, приобретающее лавинообразный характер. Протекание тока в газе (разряд в газе) может осуществляться теперь и в отсутствие внешнего



ионизатора, разряд стал самостоятельным. Вольтамперная характеристика (ВАХ) газового

разряда представлена на рисунке.

На **ВАХ электрического разряда** в газе можно выделить следующие 5 участков:

**I - область справедливости закона Ома:** имеет место баланс между числом  $N$  образуемых ионизатором носителей тока и их убылью за счет рекомбинации и ухода на электроды. Здесь по мере роста напряжения ток растет за счет увеличения числа носителей при рассасывании электронно-ионного облака, образуемого ионизатором (имеет место ток, ограниченный пространственным зарядом).

**II - область насыщения тока.** Здесь все образуемые внешним источником (ионизатором) носители тока попадают на электроды. Сила тока не зависит от напряжения, а определяется лишь мощностью ионизатора:  $I_{нас} = 2q_e N S l$  ( $j_{нас} = 2q_e N l$ ), где  $N$  - число пар носителей, образуемых в единице объема в единицу времени, а  $l$  - расстояние между электродами.

**Первые две области представляют собой несамостоятельный разряд**

**III - область ударной электронной ионизации.** Начиная с некоторого напряжения  $U_p$ , электроны<sup>3</sup> приобретают в электрическом поле кинетическую энергию  $E_k = q_e U_p = q_e E \lambda$ , где  $\lambda$  - средняя длина свободного пробега электрона в газе, достаточную для ионизации атомов (молекул) газа, то есть для отрыва электрона от них. При этом нарастает лавинообразное нарастание числа носителей тока. Коэффициент газового усиления  $A$ , показывающий во сколько раз умножается число носителей тока, достигает  $10^3 - 10^4$ .

<sup>2</sup> Верхний, ионизированный космическими лучами с той атмосферы, называемый ионосферой, состоит преимущественно из отрицательных ионов кислорода, называемых озоном.

<sup>3</sup> В обычных условиях воздух подвергается воздействию космического и радиоактивного излучений и в нем всегда имеются свободные носители тока, которые в сильных электрических полях способны создать лавину.

**IV – область Гейгера.** В конце предыдущего, третьего участка ВАХ напряжение становится достаточным для ударной ионной ионизации атомов (молекул) газа. Но сам разряд без внешнего толчка (ионизатора) здесь еще возникнуть не может. Сила же разрядного тока здесь практически не зависит от мощности ионизатора, то от числа  $N$ .

**V – область непрерывного разряда.** Приложенное к разрядному газовому электрическое поле становится достаточным для обеспечения разряда в газе в отсутствие внешнего ионизатора. Имеет место электрический пробой газа. Воздух, например пробивается при достижении напряженности  $E_{пр} = 30$  кВ/см.

В зависимости от условий осуществления различают следующие **ВИДЫ самостоятельного разряда в газе:**

**1. Искровой разряд** – происходит, когда источник электрического поля не способен поддерживать самостоятельный разряд в течение длительного времени, и он прекращается через короткое время в результате происходящего уменьшения напряжения; пример – молния, искры при коммутации в электрических цепях..

**2. Тлеющий разряд** - наблюдается при пониженном давлении в газонаполненных трубках, сопровождается слабым свечением.

**3. Дуговой разряд** (электрическая дуга) - наблюдается при повышенной силе тока и поддерживается за счёт термоэлектронной эмиссии с катода в результате бомбардировки и разогрева его положительными ионами.

**4. Коронный разряд** - наблюдается в сильно неоднородных электрических полях, образующихся, например, между острием и плоскостью, или между проводом и плоскостью (в линиях электропередач). Ионизация электронным ударом происходит здесь лишь вблизи одного из электродов, в области с повышенной напряжённостью электрического поля.

## **МАГНИТОСТАТИКА, ЕЕ ПРЕДМЕТ, ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ, ЗНАЧИМОСТЬ И МЕСТО В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

Ранее рассматривались характеристики физического поля, неразрывно связанного с неподвижными электрически заряженными частицами, проявляющего себя в силовом действии на другие заряженные неподвижные частицы и названного электростатическим. Если же заряженные частицы не неподвижны, то характер их взаимодействия существенно изменяется; появляется сила, зависящая от скоростей движения частиц. На полевом языке об этом говорят как о появлении нового поля, дополнительного к электростатическому и названного магнитным. В частном случае, при постоянных скоростях движения заряженных частиц, связанное с ними магнитное поле называют *магнитостатическим*.

Необходимость введения нового физического поля, описывающего взаимодействие движущихся электрически заряженных частиц, особенно наглядно проступает при рассмотрении взаимодействия проводников с током.

Из опыта известно, что параллельные проводники с однонаправленными токами притягиваются, а с разнонаправленными токами отталкиваются. Но это взаимодействие не является электростатическим т. к. проводник с током в целом является электрически нейтральным и электростатического поля не создает. Поэтому и ввели представление о новом физическом поле, дополнительном к электростатическому и названном магнитным. В теории относительности показывается относительность различения электрического и магнитного полей, их тесная взаимосвязь и взаимопревращаемость. В частном же, стационарном состоянии, когда заряженные тела покоятся или движутся с постоянной скоростью, создаваемые ими электрические и магнитные поля являются самостоятельно существующими независимо друг от друга.

Основные задачи магнитостатики - учения о магнитостатическом поле (МСП) - такие же, как и в электростатике: задание состояния (введение основных характеристик), установление методов расчета основных характеристик МСП, выявление характеристик взаимодействия МСП с окружением (внешнее проявление МСП).

Специфической особенностью магнитостатического взаимодействия является его нецентральный характер и, соответственно, не потенциальный характер МСП. Силы МСП являются неконсервативными, их работа зависит от формы пути (перемещения) и не равна нулю по

замкнутому контуру. Поэтому для МСП не вводится наряду с силовой скалярная энергетическая характеристика, подобная потенциалу  $\varphi$  в ЭСП.

Нецентральный характер магнитоэлектростатического взаимодействия, его зависимость от взаимориентации скоростей зараженных частиц, не позволяют сформулировать для него такой простой закон элементарного взаимодействия, какой был характерен для электростатического взаимодействия - в виде закона Кулона. Это осложняет введение основной силовой характеристики МСП, т. е. задание его состояния. МСП допускает и большее разнообразие своих источников; наряду с движущимися заряженными частицами в их роли могут выступать и элементы тока, и сами проводники с током, замкнутые контура (витки) с током, а также постоянные магниты. Все это объясняет ту неоднозначность, которая имеет место в процедуре выбора и соответственно в интерпретации основной силовой характеристики МСП, которую назвали *индукцией  $\vec{B}$  магнитного поля*. Ее можно вводить различным образом, пользуясь разными (но взаимосвязанными) проявлениями МСП - воздействием его на точечный движущийся заряд, на элемент проводника с током, на замкнутый контур с током и др..

С теоретических позиций в основу задания основной характеристики МСП желательно было бы положить ситуацию взаимодействия точечных зарядов, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью. Из опыта известно, что сила магнитного взаимодействия, дополнительного к электростатическому, прямо пропорциональна зарядам частиц, их относительной скорости и зависит от взаимориентации скоростей, будучи максимальной, при их параллельности.

Применяя полевой подход для описания и объяснения такого действия друг на друга пространственно разнесенных тел, считаем, что каждое из движущихся заряженных тел создает в окружающем пространстве некоторое непрерывно распределенное в нем материальное поле, которое и проявляет себя по силовому действию на другие заряженные движущиеся тела. Сила этого действия прямо пропорциональна заряду и скорости пробного тела, на которое действует МСП и зависит от ориентации скорости относительно силовых линий МСП. Поэтому в качестве силовой характеристики МСП выбирают отношение силы (ее максимального для возможных взаимориентаций скорости пробного тела, значения) к заряду и скорости пробного тела, т. е.  $B = F_{\text{макс}}/qv$ . Размерность и единицы  $\vec{B}$ :  $[(\text{Н}\cdot\text{м})/(\text{Кл}\cdot(\text{м}/\text{с})) = \text{Тл}]$  - Тесла.

Такой способ введения основной силовой характеристики МСП подобен способу введения основной силовой характеристики ЭСП - напряженности  $\vec{E}$ , которая определялась только отношением силы ЭСП к величине пробного заряда  $E = \vec{F}/q$ . Но основная силовая характеристика МСП - индукция  $\vec{B}$  определяется более сложно, ибо магнитоэлектростатика, в отличие от электростатики, связана с движением и со скоростями заряженных частиц и тел.

На практике большее распространение получил способ введения основной характеристики МСП на примере анализа ситуации воздействия его на пробный (достаточно малый, не возмущающий самого МСП) замкнутый контур с током. Т. к. в противоположных частях замкнутого контура ток течет в противоположных направлениях, то на них со стороны МСП будут действовать силы противоположного направления, которые создадут вращающий момент  $\vec{M}$ , ориентирующий контур определенным образом в магнитном поле. Этот момент пропорционален силе  $I$  тока в контуре, его площади  $S$  и зависит от ориентации контура в МСП. Отношение же максимального вращающего момента  $M_{\text{макс}}$ , действующего со стороны МСП на пробный контур (малый виток с малым током), к его магнитному моменту ( $P_m = IS$ ), не зависит ни от силы тока в контуре, ни от площади контура. И потому оно может служить в качестве силовой характеристики МСП самого по себе, независимой от характеристик пробного контура (в данной точке), называемой индукцией МСП:

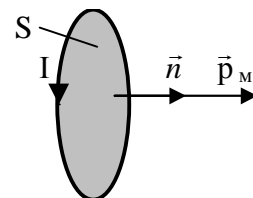
$B = M_{\text{макс}}/p_m = M_{\text{макс}}/IS$   $[\text{Н}\cdot\text{м}/\text{А}\cdot\text{м}^2 = \text{Н}/(\text{А}\cdot\text{м} = \text{Тл})]$  здесь  $P_m = IS$  - магнитный момент контура с током - мера его взаимодействия с МСП.

Магнитный момент рамки, контура с током является величиной векторной; его направление определяется по правилу правого винта (буравчика), совпадая с направлением его поступательного перемещения при вращении в направлении обтекания током контура:

$$\vec{p}_m = IS \vec{n}$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к контуру с током, направленная в соответствии с правилом правого винта.

Вращающий момент, действующий на контур с током со стороны



МСП, стремится развернуть контур так, чтобы его нормаль совпала с направлением силовых линий МСП. В общем случае, при произвольной ориентации контура с током относительно силовых линий МСП, вращающий его силами МСП момент может быть записан так:

$$M = M_{\max} \sin \alpha = B \cdot p_m \cdot \sin \alpha$$

Это выражение может быть записано в векторном виде:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}] \Rightarrow \vec{M} \perp \vec{B} \text{ и } \vec{M} \perp \vec{p}_m.$$

Силовые линии МСП, т. е. линии вектора  $\vec{B}$  - такие, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\vec{B}$ .

Также как и в электростатике, основную силовую характеристику дополняют вспомогательной, облегчающей расчет основной характеристики в неоднородных (здесь - в магнитном отношении) средах. Терминологически в названиях основных и вспомогательных силовых характеристик электростатического и магнитостатического полей имеет место несоответствие. У ЭСП основная характеристика ( $\vec{E}$ ) называлась напряженностью, а вспомогательная ( $\vec{D}$ ) - индукцией (электрическим смещением) и связь между ними выражалась формулой  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ . У МСП основная характеристика ( $\vec{B}$ ) называется индукцией, а вспомогательная ( $\vec{H}$ ) - напряженностью, и связь между ними выражается соотношением:  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м - магнитная постоянная, а  $\mu$  - магнитная проницаемость среды.

Также как и для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ , для векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  справедлив принцип суперпозиции, позволяющий находить характеристики результирующего МСП, созданного совокупностью источников (движущихся зарядов, проводников с током, контуров с током) как векторную сумму или интеграл от соответствующих характеристик отдельных, элементарных источников:

$$\vec{B}_\Sigma = \Sigma \vec{B}_i; \vec{H}_\Sigma = \Sigma \vec{H}_i, \text{ или } \vec{B}_\Sigma = \int d\vec{B}$$

### Методы расчета характеристик МСП. Решение основной прямой задачи магнитостатики.

Так же как и для ЭСП, для МСП - как векторного поля, важными теоремами, лежащими в основе методов расчета характеристик МСП, являются теоремы о циркуляции и о потоке вектора поля (вектора  $\vec{B}$  или вектора  $\vec{H}$ ).

Вследствие непотенциального, вихревого характера МСП, для него не удастся просто и наглядно получить эти теоремы исходя из основного закона, устанавливающего фундаментальный характер сил магнитостатического взаимодействия на элементарном уровне (как это было в электростатике - из закона Кулона).

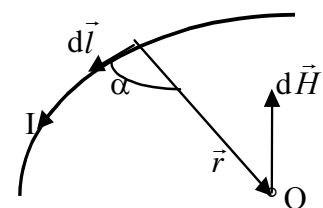
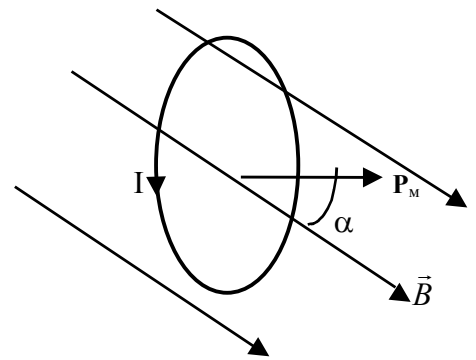
С некоторым приближением, условностью, в качестве отношения, аналогичного, получаемому из закона Кулона, выражению для напряженности поля точечного заряда, может служить **закон Био - Савара - Лапласа**. Этот закон устанавливает силу МСП, создаваемого элементарным источником - элементом тока  $Jd\vec{l}$  на удалении  $r$

$$dH = Idl \sin \alpha / 4\pi r^2 \text{ или } dB = \mu_0 \mu Idl \sin \alpha / 4\pi r^2$$

где угол  $\alpha$  - угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ .

В векторной форме закон Био - Савара - Лапласа принимает следующий вид:

$$d\vec{H} = I [d\vec{l} \times \vec{r}] / 4\pi r^3 \text{ или } d\vec{B} = \mu_0 \mu d\vec{H} = \mu_0 \mu I [d\vec{l} \times \vec{r}] / 4\pi r^3$$



Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен как вектору  $d\vec{l}$ , так и вектору  $\vec{r}$  и направлен в сторону, определяемую правилом векторного произведения, или правилом буравчика (правого винта): - вращая буравчик рукоятью в плоскости векторов  $[d\vec{l}, \vec{r}]$  в направлении протекания тока, получим совпадение поступательного перемещения буравчика с направлением вектора индукции МСП.

Закон Био – Савара - Лапласа носит дифференциальный характер, и полную индукцию  $B_{\Sigma}$  или напряженность  $H_{\Sigma}$  МСП в данной точке, создаваемую всем проводником с током, находят путем интегрирования, используя принцип суперпозиции:  $\vec{B}_{\Sigma} = \Sigma \vec{B}_i$  или  $\vec{B}_{рез} = \int d\vec{B}$ .

Рассмотрим некоторые **примеры применения закона Био - Савара - Лапласа для расчета характеристик МСП, создаваемого проводниками (с током) разной формы.**

### 1) прямолинейный бесконечный проводник с постоянным током

Для нахождения характеристик результирующего МСП, создаваемого прямолинейным проводником с током постоянной силы  $I$  на расстоянии  $a$  от него, выберем на проводнике элементарный отрезок  $d\vec{l}$  и запишем для него закон Био – Савара - Лапласа. Полную индукцию  $B$  от всего проводника определим путем интегрирования; для этого три переменные  $l$ ,  $r$  и  $\alpha$  в законе Био – Савара - Лапласа: сведем к одной, удобнее всего к  $\alpha$ :

$$r = a/\sin\alpha; l = a \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow dl = -a d\alpha/\sin^2\alpha.$$

Подставляя их под интеграл, произведем интегрирование; переменная  $\alpha$  для бесконечного проводника изменяется в пределах от  $\pi$  до  $0$ .

$$dB = \mu_0 I dl \sin\alpha / 4\pi r^2 = -\mu_0 I \sin^2\alpha d\alpha \sin\alpha / 4\pi a^2 \sin^2\alpha = -\mu_0 I \sin\alpha d\alpha / 4\pi a;$$

$$B = \int dB = -(\mu_0 I / 4\pi a) \int \sin\alpha d\alpha = -(\mu_0 I / 4\pi a)(-\cos\pi - \cos 0) = \mu_0 I / 2\pi a$$

$$H = B/\mu_0 = I/2\pi a. \quad [H] = \text{А/м.}$$

В результате получили довольно простые выражения для индукции и особенно для напряженности МСП, создаваемого бесконечно длинным прямолинейным проводником с постоянным током  $I$  на удалении  $a$  от него.

**2) Если проводник имеет конечную длину**, то для него можно повторить все вышесказанное и проделанное с той лишь разницей, что пределы интегрирования ( $\pi - 0$ ), характерные для бесконечного проводника, заменить на пределы ( $\alpha_1 - \alpha_2$ ). При этом очевидно, результат получается следующим:

$$B = (\mu_0 I / 4\pi a)(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \quad \text{и} \quad H = (I/4\pi a)(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

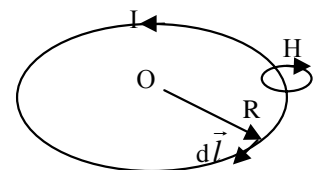
Углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - это углы, под которыми из концов проводника видна точка, в которой ищется индукция и/или напряженность МСП.

### 3) круговой проводник с постоянным током.

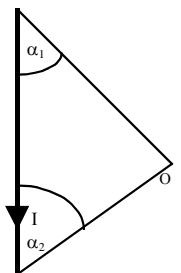
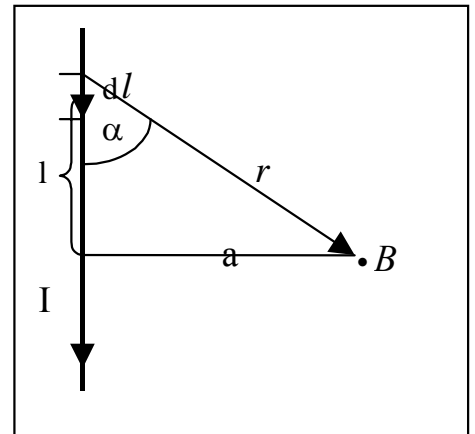
Рассчитаем вначале  $B$  и  $H$  в центре кругового тока силой  $I$  и радиусом  $R$ . Так как  $|\vec{r}| = R$  и  $\vec{r} \perp d\vec{l}$ , т. е.  $\alpha = \pi/2$ , то  $dH = Idl/4\pi r^2 = Idl/4\pi R^2 \Rightarrow$

$$H = \int_l dH = \int_0^{2\pi R} Idl/4\pi R^2 = (I/4\pi R^2) \cdot 2\pi R = I/2R \quad \text{и}$$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 I / 2R$$



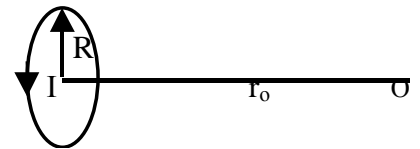
Силовые линии МСП обвивают проводник с током в направлении, определяемом правилом буравчика (правого винта): при вкручивании буравчика по направлению тока, вращательное перемещение рукоятки задает ориентацию силовой линии.



В точке, лежащей на оси кругового тока на расстоянии  $r_0$ , от его центра, значения индукции  $B$  и напряженности  $H$  определяются более общими выражениями:

$$= IR/2(R^2 + r_0^2)^{3/2} \text{ и } B = \mu_0 \mu IR/2(R^2 + r_0^2)^{3/2}.$$

Из полученных выражений следуют как частный случай при  $r_0 = 0$ , выше найденные формулы для  $B$  и  $H$  в центре кругового проводника:



$$H = I/2R \text{ и } B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu I/2R$$

### Метода расчета характеристик МСП на основе теоремы о циркуляции вектора $\vec{B}$ (или вектора $\vec{H}$ ).

Если у ЭСП, которое имело потенциальный характер, циркуляция - работа по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру, равнялась нулю, то у МСП, вследствие его непотенциального, вихревого характера, циркуляция векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  отлична от нуля. Например, для прямолинейного бесконечного проводника с постоянным током, как мы уже рассматривали, она может быть представлена в виде:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_1 dl = \oint_L H dl = \oint_L Idl/2\pi a = (I/2\pi a) \oint_L dl = (I/2\pi a) \cdot 2\pi a = I$$

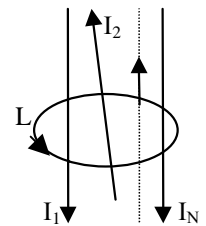
$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_1 dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = (\mu_0 \mu I/2\pi a) \cdot 2\pi a = \mu_0 \mu I$$

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  для прямолинейного бесконечного проводника с током численно равна силе тока в этом проводнике  $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I$ . Если замкнутый контур  $L$  охватывает  $N$  токов, то

можно сформулировать общую теорему о циркуляции вектора  $\vec{H}$ :

циркуляция вектора  $\vec{H}$  равна алгебраической сумме токов, охватываемых замкнутым контуром:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I_i$$



**Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по любому контуру также не зависит ни от размеров, ни от формы контура, а с точностью до постоянного множителя  $\mu_0 \mu$  определяется алгебраической суммой токов, охватываемых данным контуром:**

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_1 dl = \mu_0 \mu \sum I_i$$

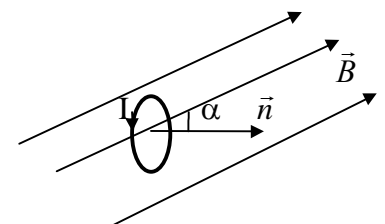
Неравенство нулю циркуляции векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  говорит о том, что силовые линии МСП (линии векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ) являются замкнутыми (образуют вихри), в отличие от ЭСП, где силовые линии имели начало (на положительных зарядах) и конец (на отрицательных зарядах или в бесконечности).

Другим выражением этой вихревой, непотенциальной природы МСП является равенство нулю потока вектора  $\vec{B}$  (и  $\vec{H}$ ) через любую замкнутую поверхность.

Элементарный поток  $d\Phi_B = \vec{B} d\vec{S} = B dS \cos \alpha = B_n dS$  пропорционален числу силовых линий, пронизывающих площадку  $\vec{S}$ .

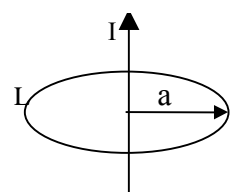
Полный поток  $\Phi_B$  вектора  $\vec{B}$  через любую замкнутую поверхность  $S$  равен нулю, т. к. сколько силовых линий входит в нее, столько и выходит из нее (в силу их замкнутого характера):

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0$$



В качестве метода расчета характеристик МСП более важную роль играет теорема о циркуляции, а не о потоке вектора  $\vec{B}$  или  $\vec{H}$  (в электростатике было наоборот). Так, например,

теорема





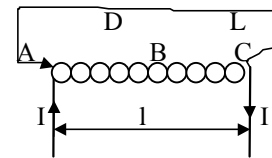
о циркуляции вектора  $\vec{B}$  (или  $\vec{H}$ ) позволяет легко рассчитать В и Н МСП, создаваемого прямолинейным проводником с током I на удалении a:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H_1 dl = \oint_L H dl = H \oint_L dl = H \cdot 2\pi a = I$$

$$\Rightarrow \boxed{H = I/2\pi a}$$

Получили, естественно тот же результат, что и ранее при применении теоремы (закона) Био - Савара - Лапласа, но более быстро, проще.

Применим теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  для нахождения характеристик МСП соленоида - длинной катушки с большим числом витков N. Возьмем циркуляцию вектора  $\vec{H}$  через замкнутый контур L  $\rightarrow$  ABCDA, проходящий через ось соленоида AC:



$$\oint_L H_1 dl = \Sigma I_i = NI$$

При удалении наружного участка D контура на  $\infty$ , где МСП соленоида стремится к нулю, получим:

$$\oint_{ABCD} H_1 dl = \int_{ABC} H_1 dl + \int_{CDA} H_1 dl = \int_{ABC} H_1 dl = Hl = IN \Rightarrow \boxed{H = IN/l}$$

Напряженность МСП внутри соленоида равна числу ампервитков, приходящихся на единицу длины l соленоида. Подобная формула справедлива и для напряженности магнитного поля тороида - катушки «свернутой в кольцо, в бублик». Длинной l у тороида равна  $2\pi R$ , где R - его срединный радиус.

### Индуктивность контура и соленоида

Ток, протекающий по контуру (витку), порождает МСП, которое пронизывает и поверхность, ограниченную этим контуром, т. е. контур с током находится в собственном магнитном поле, и его поверхность пронизывается его же потоком  $\Phi_B$ . Чем больше ток I в контуре, тем больше порождаемый им поток  $\Phi_B$ .

Если контур содержит N витков, т. е. имеем катушку, то результирующий поток  $\Phi_{B\Sigma} = N\Phi = \Psi$ , сцепленный с витками катушки, его породившей, называется *потокосцеплением*.

В отличие от потока  $\Phi$ , потокосцепление  $\Psi$  характеризует «собственное» магнитное поле, т. е. поле, создаваемое током самого контура (катушки), поверхность которых оно пронизывает.

С ростом силы тока в контуре (катушке) прямо пропорционально растет и порождаемое им потокосцепление, т. е.  $\Psi \sim I$ . Отношение же  $\Psi/I = L$ , называемое *индуктивностью* контура (катушки), не зависит по отдельности ни от силы тока I в контуре, ни от сцепленного с ним потока  $\Psi$ , а определяется размерами и формой контура, числом витков в нем и магнитной проницаемостью среды  $\mu$ :

$L = \Psi/I = N\Phi/I = NBS/I = N \mu_0 \mu I N S / I = \mu_0 \mu N^2 S / l = \mu_0 \mu n^2 S l$ , где  $n = N/l$  - число витков на единицу длины катушки, S - площадь ее поперечного сечения.

Индуктивность катушки является магнитным аналогом емкости конденсатора. Для соленоида индуктивность выразится следующей формулой:

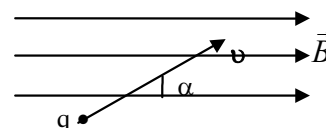
$$L = \Psi/I = \mu_0 \mu N^2 S / l = \mu_0 \mu n^2 S l.$$

Единица индуктивности - генри:  $\Gamma_n = 1 \text{ Вб}/1\text{А}$

### Силовые проявления МСП. Действие МСП на проводник и контур с током и на движущуюся заряженную частицу. Сила Лоренца

Элементарным и потому фундаментальным силовым проявлением МСП является действие его на движущуюся заряженную частицу. Сила F, с которой МСП действует на такую частицу, прямо пропорциональна ее заряду q, скорости v движения, индукции B и зависит от ориентации скорости частицы относительно направления силовых линий  $\vec{B}$ , задаваемой углом  $\alpha = (\vec{v} \wedge \vec{B})$ :

$$F = qvB \sin(\vec{v} \wedge \vec{B}) = qvB \sin \alpha; \Rightarrow \vec{F} = q[\vec{v} \wedge \vec{B}]$$



Эта сила перпендикулярна как вектору скорости  $\vec{v}$  частицы, так и вектору индукции  $\vec{B}$ , и ее направление определяется правилом левой руки (для положительного знака заряда частицы): раскрытая ладонь с отогнутым большим пальцем располагается так, что силовые линии МСП входят в нее, а четыре пальца направлены по скорости частицы, тогда отогнутый большой палец укажет направление силы, действующей со стороны МСП на частицу.

При движении частицы вдоль силовых линий МСП  $\alpha = 0$  и сила действия МСП на частицу равна нулю, а при поперечном движении ( $\alpha = \pi/2$ ) и  $F = F_{\text{макс}} = qvB$ .

Если заряженная частица влетает, в МСП перпендикулярно его силовым линиям, то траекторией частицы будет окружность с радиусом  $R$ , определяемым из условия:

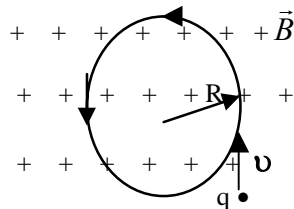
$$F = F_{\text{цс}} = F_{\text{макс}} = qvB = mv^2/R \Rightarrow R = mv/qB \text{ и периодом } T \text{ вращения } \boxed{T = 2\pi R/v = 2\pi m/qB}$$

.Характерно, что период вращения частицы в магнитном поле не зависит от ее скорости.

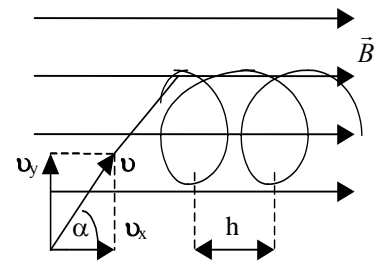
Сила со стороны МСП является в этом случае центростремительной, изменяющей лишь направление, но не значение скорости частицы.

При  $\alpha \neq \pi/2$  траекторией будет винтовая линия (спираль):

а)  $\alpha = \pi/2$



б)  $\alpha \neq \pi/2$



Т. к. сила, действующая со стороны МСП на движущуюся заряженную частицу, перпендикулярна ее скорости, то, не изменяя скорость частицы по численному значению, эта сила не совершает работы (не изменяет кинетическую энергию частицы). Поэтому, например, источники МСП (сердечники, постоянные магниты...) могут длительно существовать, не разряжаясь, не уменьшая свою энергию.

В общем случае, при наличии как магнитного, так и электрического поля, результирующая сила, действующая на частицу равна:  $\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v} \vec{B}] = q\{\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}]\}$  и называется силой Лоренца. Часто силой Лоренца называют ее магнитную составляющую  $q[\vec{v} \vec{B}]$ .

При помещении в МСП проводника с током на него действует сила, представляющая собой результирующую сил, действующих со стороны МСП на движущиеся в проводнике заряженные частицы (носители тока) и называемая силой Ампера.

Если поле (МСП) однородное, а проводник прямолинейный, то сила Ампера может быть выражена следующей формулой:

$$F_A = NF = NqvB \sin \alpha. \text{ Так как } v = l/t, \text{ и } Nq/t = I, \text{ то } F_A = (Nql/t)B \sin \alpha = BIl \sin \alpha,$$

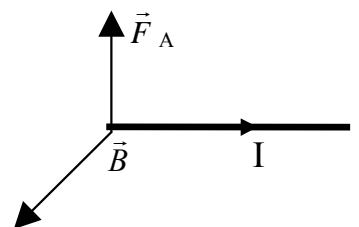
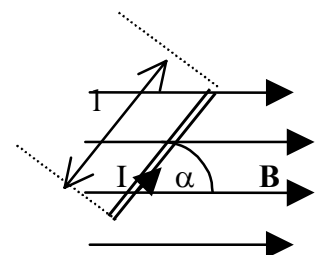
где  $q$  - заряд одной частицы (носителя тока);

$N$  - число носителей тока в проводнике длиной  $l$ ;

$t$  - время прохождения заряженной частицей пути  $l$ .

Сила Ампера направлена также, как и сила, действующая со стороны МСП на отдельную положительно заряженную частицу, т. е. в соответствии с правилом левой руки. Здесь четыре пальца раскрытой левой ладони направляются по току в проводнике.

В более общем случае, когда МСП неоднородно, а проводник с током - криволинейный, можно записать выражение для элементарной силы Ампера  $d\vec{F}_A$  - силы, действующей со стороны МСП на малый элемент тока  $I d\vec{l}$ , который можно считать прямолинейным, а магнитостатическое поле вокруг него - однородным. Тогда выражение для силы Ампера:  $F_A = BIl \sin \alpha$  при-



нительно к элементу тока  $I d\vec{l}$  примет вид  $d\vec{F} = B I d\vec{l} \sin \alpha$ . Оно может быть записано в векторном виде:  $d\vec{F}_A = I [d\vec{l} \times \vec{B}]$ . Полная же сила, действующая со стороны МСП на криволинейный проводник с током, запишется в виде интеграла по всем элементам тока (по всей длине проводника с током) от элементарных сил:

$$\vec{F}_A = \int d\vec{F}_A$$

На любой замкнутый контур  $L$  с током результирующая сила  $\vec{F}_A$  со стороны однородного МСП равна нулю:

$$I \oint_L [d\vec{l}, \vec{B}] = I \left[ \oint_L d\vec{l}, \vec{B} \right] = 0, \text{ т. к. } \oint_L \vec{B} d\vec{l} = 0$$

### Взаимодействие проводников с током.

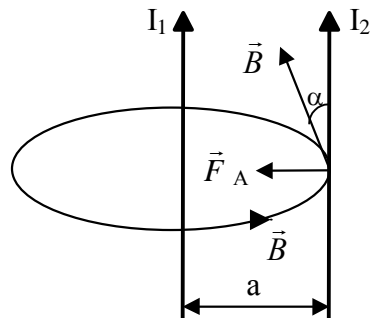
Опытный факт силового действия друг на друга проводников с током (параллельные проводники с одина направленными токами притягиваются, а с разнонаправленными токами – отталкиваются), обнаруженный Ампером, послужил основанием для введения представления о магнитном поле как посреднике, передающем силовое действие между телами, не соприкасающимися непосредственно. На полевом языке (описании) взаимодействие проводников с током интерпретируется как действие на каждый из проводников магнитного поля, создаваемого другим проводником.

Рассмотрим взаимодействие двух бесконечно длинных параллельных, прямолинейных проводников с постоянными токами в них.

Каждый из проводников создает свое магнитное поле, основная силовая характеристика - индукция  $B$  которого, определяется выражением:  $B = \mu_0 \mu I / 2\pi a$ . Это поле действует на другой проводник с силой Ампера  $F_A = B I_2 \sin \alpha = \mu_0 \mu I_1 I_2 / 2\pi$ . На единицу длины проводника приходится сила Ампера, равная:  $F_A / l = \mu_0 \mu I_1 I_2 / 2\pi a$ .

По третьему закону Ньютона, силы, с которыми проводники с током (или их магнитные поля) действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению. Т. к. силовые линии МСП проводника с током направлены согласно правилу правого винта (буравчика) и представляют собой концентрические окружности вокруг проводника, то, применив правило левой руки для силы Ампера, убеждаемся, что при одинаковых токах (как это показано на рисунке), силы взаимодействия носят характер притяжения.

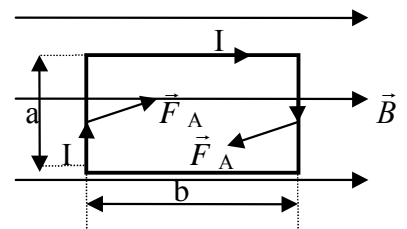
Магнитное взаимодействие проводников с током положено в основу определения основной электрической единицы в СИ - единицы силы тока - ампера. За ампер принимается сила такого тока в прямолинейных параллельных проводниках, находящихся в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, при котором сила их взаимодействия в расчете на единицу длины равна  $2 \cdot 10^{-7}$  Н.



### Контур (рамка) с током в однородном внешнем МСП

Основную силовую характеристику магнитного поля - индукцию  $B$  мы вводили на примере опытного факта, заключающегося в действии МСП на рамку с током в виде вращающего момента (момента сил МСП). Такими силами являются силы Ампера. Получим выражение для вращающего момента, действующего со стороны МСП на прямолинейную рамку с током силой  $I$ , исходя из силы Ампера.

На стороны рамки, параллельные силовым линиям МСП сила Ампера не действует (ее значение равно нулю). На перпендикулярные стороны сила Ампера действует в противоположных направлениях (вследствие противоположного направления тока в них), благодаря чему и возникает вращающий момент  $M$  - произведение силы на плечо ее дейст-



вия.

$$M = 2F_A \cdot b/2 = 2BIab/2 = BIS = \text{В}p_m$$

где:  $S = ab$  - площадь рамки с током;

$p_m = IS$  - магнитный дипольный момент рамки с током.

В общем случае, при  $\alpha \neq \pi/2$ ,  $M = p_m B \sin \alpha$  или, в векторной форме

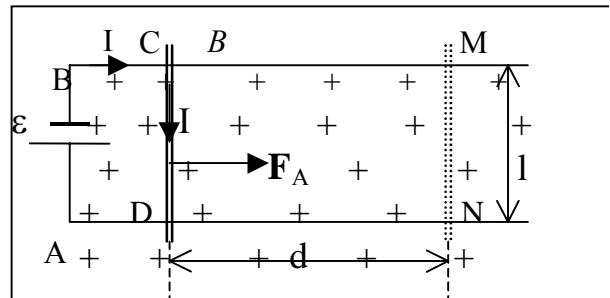
$$\vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}]$$

Магнитное поле стремится сориентировать рамку с током так, чтобы ее магнитный момент  $\vec{p}_m$  был направлен вдоль силовых линий  $\vec{B}$ . При  $\alpha = 0$  рамка сориентирована магнитным полем и испытывает с его стороны только растягивающее воздействие.

Для того чтобы угол  $\alpha$  между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  изменить на  $d\alpha$ , нужно совершить работу  $dA = Md\alpha = p_m B \sin \alpha d\alpha = -p_m B d(\cos \alpha) = -dW_m \Rightarrow W_m = -p_m B \cos \alpha + \text{const}$ . Значению  $\alpha = 0$  соответствует минимум потенциальной энергии  $W_m$  магнитного взаимодействия.

### Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле.

Рассмотрим следующий мысленный опыт: в однородном МСП расположен прямолинейный контур с постоянным током, сторон контура образована подвижной проводящей перемычкой длиной  $l$ . Вычислим работу, которая совершается при перемещении подвижной перемычки на расстояние  $d$ . Важно отметить, что непосредственно на перемычку действует сила со стороны



МСП - сила Ампера, но работу по перемещению перемычки совершает не МСП, а источник тока, поддерживающий постоянную силу тока в цепи:

$$A_{12} = Fd = BIl d = IBS = I\Phi_B$$

Получили, что работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на величину потока магнитной индукции (число силовых линий МСП), который пересекает проводник при своем перемещении:  $A_{12} = I\Phi_B$

Поток  $\Phi_B$  можно рассматривать как разность двух значений  $\Phi_{B1}$  и  $\Phi_{B2}$ , которые представляют собой потоки вектора индукции МСП, пронизывающие замкнутый контур ABCB и ABMN при двух разных положениях перемычки. И тогда работу по перемещению проводника (и контура) с током в магнитном поле можно записать в форме подобной таковой для работы перемещения заряда в электростатическом поле:

$$A_{12} = I(\Phi_{B2} - \Phi_{B1}). \text{ В электростатике было } A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Полученное выражение для работы перемещения проводника с током в магнитном поле оказывается справедливым и для более общего случая - перемещения в магнитном поле всего замкнутого контура с током в целом, независимо от степени однородности магнитоэстатического поля и вида движения контура - поступательного, вращательного или совместного, и способа изменения магнитного потока.

Работу по перемещению контура с током в магнитном поле можно определить как численно равную произведению силы тока в контуре на изменение потока магнитной индукции  $\Phi_{B2} - \Phi_{B1}$ , пронизывающего контур в конечном и начальном положениях.

### Энергия и объемная плотность энергии магнитного поля

По аналогии с выводом выражения для энергии электрического поля рассмотрим магнитный аналог конденсатора - соленоид - длинную тонкую катушку длиной  $l$ , обладающую большим числом витков  $N$ , площадью поперечного сечения  $S$  и индуктивностью  $L$ . Пусть по катушке протекает ток силой  $I$  и катушку пронизывает магнитный поток  $\Phi_{B2} = BSN = \mu_0 \mu I N^2 S/l$ .

При увеличении тока в катушке на  $dI$ , пронизывающий ее поток возрастает на

$d\Psi = \mu_0 \mu N^2 S dI/l = LdI$  ( $L = \mu_0 \mu N^2 S/l$  - индуктивность катушки), и при этом совершается работа равная:  $dA = Id\Psi = LI dI$ .

Полная работа при увеличении силы тока в катушке от нуля до  $I$  будет равна:

$$A = \int_0^I dA = \int_0^I LI dI = LI^2/2$$

Эта работа ведет к появлению магнитостатического поля катушки и численно равна его энергии  $\boxed{W_M = A = LI^2/2}$ . Полученное выражение по форме очень сходно с подобным выражением для энергии электростатического поля заряженного конденсатора:  $W_3 = CU^2/2$ .

На единицу объема ( $V = Sl$ ) катушки приходится энергия  $\omega_M$ , численно равная:

$$\omega_M = W_M/V = \mu_0 \mu N^2 S I^2 / 2Sl = \mu_0 \mu N^2 I^2 / 2l^2 = BH/2 = \boxed{\mu_0 \mu H^2 / 2}$$

и называемая *объемной плотностью энергии магнитного поля*.

Напомним, что для объемной плотности энергии  $\omega_3$  электрического поля выражение имело сходный вид

$$\omega_3 = DE/2 = \epsilon_0 \epsilon E^2/2$$

*Явление и закон электромагнитной индукции. ЭДС самоиндукции.*

В 1831 г. М. Фарадей опытным путем установил, что при всяком изменении потока  $\Phi_B$  индукции магнитного поля, пронизывающего поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, в нем наводится, индуцируется электродвижущая сила (ЭДС индукции  $\epsilon_{ин}$ ), пропорциональная скорости изменения магнитного потока:  $\epsilon_{ин} \sim d\Phi/dt$ .

В 1834 г. Ленц установил правило, согласно которому в замкнутом проводящем контуре ЭДС индукции  $\epsilon_{ин}$  порождает электрический ток  $I_{ин}$  такого направления, что созданное им магнитное поле направлено так, что противодействует изменениям магнитного потока, породившего  $\epsilon_{ин}$ .

С учетом правила Ленца **закон электромагнитной индукции** (Фарадея) принимает следующий вид:  $\epsilon_{ин} = - d\Phi/dt$  - **ЭДС индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на контур.**

Гельмгольц вывел этот закон исходя из закона сохранения энергии, рассмотрев ситуацию перемещения проводящего контура с сопротивлением  $R$ , включенного в цепь источника тока с ЭДС  $\epsilon$  в магнитном поле.

Энергия источника  $\epsilon Idt$  расходуется на джоулев нагрев  $I^2 R dt$  и совершение работы по перемещению контура в магнитном поле  $Id\Phi$ , т. е.

$$\epsilon Idt = I^2 R dt + Id\Phi \Rightarrow I = (\epsilon - d\Phi/dt)/R = (\epsilon + \epsilon_{ин})/R$$

где изменение магнитного потока при перемещении контура порождает в нем некоторую отрицательную добавку к ЭДС источника тока, и представляющую собой ЭДС индукции  $\boxed{\epsilon_{ин} = - d\Phi/dt}$

Если по замкнутому контуру, содержащему  $N$  витков, протекает ток силой  $I$ , то контур пронизывается магнитным потоком от собственного (порожденного самим током  $I$ ) магнитного поля]

$N\Phi = \Psi$  - потокосцепление - полный магнитный поток, сцепленный со всеми  $N$  витками контура.

Очевидно, что  $\Psi \sim I$  или  $\Psi = LI$ , где коэффициент пропорциональности  $L$  - коэффициент самоиндукции, или индуктивность контура.

При изменении силы тока в контуре изменится и пронизывающий его магнитный поток  $\Phi$  и потокосцепление  $\Psi = N\Phi$ . В соответствии с законом электромагнитной индукции, в контуре будет наведена ЭДС, которая в данной ситуации будет называться ЭДС самоиндукции:

$$\epsilon_{си} = - Nd\Phi/dt = - d\Psi/dt = - L \cdot dI/dt$$

Само явление электромагнитной индукции в случае, когда изменение магнитного потока через контур осуществляется за счет изменения тока в самом контуре, называется **явлением самоиндукции**.

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПИ С ИНДУКТИВНОСТЬЮ. КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В статическом (заряды неподвижны) и стационарном (заряды равномерно движутся, т. е. образуют постоянный ток) состояниях, создаваемые зарядами и токами электро- и магнитоэлектростатическое поля существуют автономно, независимо друг от друга. Если же заряды движутся неравномерно, т. е. образуют переменный ток, то, как следует уже из явления электромагнитной индукции, возникает связь между электрическим и магнитным полем (электрическое поле создается уже не только электрическими зарядами, но и переменным магнитным полем). Такая связь приводит к появлению единого электромагнитного поля, основными формами существования которого являются электромагнитные колебания и волны. В отличие от электромагнитных волн, электромагнитные колебания существуют в локализованном, т. е. неразрывно связанном с порождающими его телами, состоянии. Такое, не распространяющееся в пространстве состояние электромагнитного поля, называется квазистационарным.

Под колебаниями понимают вид движений, характеризующихся повторяющимися изменениями состояния системы вокруг положения равновесия. В механике состояние системы задавалось двумя параметрами: положением (радиус-вектором  $\vec{r}$ ) и быстротой его изменения - скоростью  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ .

Электромагнитное состояние со стороны источников поля может быть задано также двумя параметрами: зарядом  $q$  и быстротой его изменения - силой тока  $I = dq/dt$ .

Колебания могут происходить в системе, обладающей упругостью, инертностью и малым затуханием при выведении ее из устойчивого состояния равновесия. Благодаря упругости в возмущенной системе (выведенной из равновесия) возникают возвращающие силы, противодействующие отклонению системы от положения равновесия, а благодаря инертности, система, возвращаясь в равновесие, проскакивает его (по инерции) и самоотклоняется от равновесия в противоположную сторону. Далее процесс развивается в обратном направлении и таким образом возникает повторяющийся, циклический характер изменения состояния системы.

Ниже мы будем рассматривать периодические колебания заряда и тока, характерным для которых является наличие периода  $T$  - наименьшего времени повторения процесса изменения состояния системы:  $q(t) = q(t + nT)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

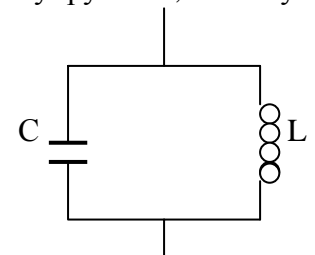
По форме изменения параметров состояния рассмотрим колебания, называемые гармоническими:  $q = q_m \cos(\omega t + \varphi) = q_m \cos\Phi$ ,

где  $q_m$  - амплитуда колебания - наибольшее (максимальное) отклонение от равновесного значения;  $\Phi = \omega t + \varphi$  - полная фаза колебания - характеристика текущего (мгновенного) состояния колебательного процесса;  $\omega = d\Phi/dt$  - циклическая частота колебания; измеряется в рад/с и численно равна скорости изменения фазы;

$\varphi = \Phi$  (при  $t = 0$ ) - начальная фаза колебания; измеряется в радианах и задает состояние колебательного процесса в начальный момент времени.

Простейшей электромагнитной колебательной системой является *колебательный контур*, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности. Если провести аналогию с механическими колебаниями, то нужно отметить, что конденсатор реализует свойство упругости, а катушка индуктивности - свойство инертности.

Рассмотрим качественно механизм возникновения колебаний заряда и тока в контуре. В состоянии равновесия конденсатор незаряжен. Сообщив конденсатору некоторый заряд  $q$ , выведем колебательную систему из положения равновесия. Появившееся электрическое поле приведет в движение заряды, накопленные на пластинах конденсатора; потечет разрядный ток  $I$ . Этот ток, протекая по виткам катушки, вызовет появление в ней ЭДС самоиндукции  $\epsilon_{си} = -LdI/dt$ , «направленной» (в соответствии с правилом Ленца) против причины ее вызвавшей, препятствующей тем изменениям разрядного тока, которые ее породили. Т. к. в начальный момент разрядный ток стремится резко возрасти, то ЭДС самоиндукции будет препятствовать его возрастанию. При этом по мере разряда конденсатора, накопленная в нем энергия электрического поля будет переходить в энергию магнитного поля катушки. В момент, когда конденсатор полностью разрядится, вся его энергия перейдет в энергию



магнитного поля катушки  $W_M = LI^2 / 2$ , ток в контуре достигнет максимального значения. Колебательная система приходит в равновесное состояние. Но вследствие магнитной инертности ток в контуре не может резко упасть до нуля; этому препятствует ЭДС самоиндукции, которая меняет знак и поддерживает дальнейшее протекание тока, вызывающего теперь перезарядку конденсатора. Перезарядный ток уменьшается до нуля, конденсатор полностью перезарядается и далее процесс разрядки конденсатора повторяется в обратном направлении.

Рассмотрим количественную сторону процессов возникновения колебаний в контуре. Считая систему консервативной (пренебрегая потерями энергии колебаний в контуре), запишем закон сохранения энергии:

$$W_0 + W_M = q^2/2C + LI^2/2 = \text{const} \Rightarrow q^2/CL + (dq/dt)^2 = \text{const}$$

Продифференцировав полученное равенство по времени, получим дифференциальное уравнение для заряда. Это уравнение представляет собой *дифференциальное уравнение гармонических колебаний*:

$$(2q/LC) \cdot dq/dt + 2(dq/dt) \cdot d^2q/dt^2 = 0 \Rightarrow d^2q/dt^2 + q/LC = 0 \Rightarrow \boxed{d^2q/dt^2 + \omega_0^2 C = 0}$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  - циклическая частота собственных колебаний заряда в контуре, определяемая его внутренними (собственными) характеристиками: емкостью конденсатора и индуктивностью катушки.

Решением полученного уравнения, как нетрудно видеть, является гармоническая функция

$$q = q_M \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Амплитуда  $q_M$  и начальная фаза  $\varphi$  колебаний заряда определяются внешними факторами, воздействиями: сообщенным зарядом конденсатору и соответствующим моментом времени.

Для периода  $T$  собственных колебаний в контуре получается выражение

$$\boxed{T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$$

которое называется формулой Томсона.

В соответствии с формулой Томсона, период собственных колебаний заряда в контуре возрастает с ростом емкости конденсатора и индуктивности катушки.

При неизменном исходном заряде на конденсаторе увеличение его емкости приводит к уменьшению энергии электрического поля конденсатора, а значит и к уменьшению энергии магнитного поля катушки:  $q_M^2/2C = LI_M^2/2$  (их максимальных значений). Отсюда следует уменьшение максимального и соответственно и среднего значения разрядного тока. А меньшим током тот же заряд будет дольше «стекать» с конденсатора (конденсатор будет дольше разряжаться), следовательно, период колебаний заряда в контуре будет больше.

Аналогично при увеличении индуктивности катушки при том же значении ее энергии уменьшается сила разрядного (и перезарядного) тока, а меньшим током конденсатор будет разряжаться и перезарядаться дольше, т. е. период колебаний заряда будет большим. Можно это интерпретировать также как результат возрастания ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{си} = -LdI/dt$ , которая, препятствуя изменениям тока, приводит к понижению его среднего значения и удлинению тем самым процессов разряда и перезаряда колебаний в контуре.

Разность потенциалов на конденсаторе:

$$\Delta\varphi = q/C = (q_M/C) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

изменяется синфазно (в одинаковой фазе) с колебаниями заряда, а сила тока

$$I = dq/dt = -\omega_0 q_M \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_M \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2) -$$

- опережает по фазе на  $90^\circ$  колебания заряда. Соответственно, сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  и колебания энергий электрического и магнитного полей. Будучи квадратичными функциями, соответственно заряда и тока, энергии  $W_0$  и  $W_M$  изменяются с удвоенной частотой.

## Затухающие колебания

В реальных условиях любое движение всегда сопровождается процессами диссипации, т. е. необратимого поглощения и рассеяния энергии. Роль диссипативного элемента в электромагнитных цепях выполняет резистор, основной характеристикой которого является сопротивление  $R$ .

Каждую секунду резистор, согласно закону Джоуля - Ленца, превращает в тепло (за счет рассеяния носителей тока на неоднородностях структуры и состава материала резистора) мощность

$P = Q/t = I^2 R$ . Покажем, что собственные колебания заряда и тока в реальном колебательном контуре, содержащем помимо конденсатора и катушки индуктивности еще и резистор, являются затухающими, т. е. их амплитуда и энергия монотонно убывают со временем.

Применим опять закон сохранения энергии для получения дифференциального уравнения затухающих колебаний (ДУЗК) в реальном контуре (контуре с сопротивлением и потерями энергии).  $d/dt(q^2/2C + LI^2/2) = -dQ/dt = -P = -I^2 R \Rightarrow (2q/LC) \cdot dq/dt + 2(dq/dt) \cdot d^2q/dt^2 = -(dq/dt) \cdot R \Rightarrow d^2q/dt^2 + q/LC + (R/L) \cdot dq/dt = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{d^2q/dt^2 + 2\beta \cdot dq/dt + \omega_0^2 \cdot q = 0} \text{ - ДУЗК.}$$

где:  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  - собственная частота свободных (незатухающих) колебаний в контуре;

$\beta = R/2L$  - коэффициент затухания колебаний:

Решить полученное уравнение можно путем замены переменной:  $q = Qe^{-\beta t}$ . Подставив в дифференциальное уравнение выражения для  $q = Qe^{-\beta t}$  и первой  $dq/dt = e^{-\beta t} dQ/dt - \beta Qe^{-\beta t}$  и второй  $= d^2q/dt^2 = e^{-\beta t} \cdot d^2Q/dt^2 - 2\beta \cdot dQ/dt \cdot e^{-\beta t} + \beta^2 Qe^{-\beta t}$  производных, получим после сокращения дифференциальное уравнение для новой переменной  $Q$ :

$$e^{-\beta t} \cdot d^2Q/dt^2 - 2\beta \cdot dQ/dt \cdot e^{-\beta t} + \beta^2 Qe^{-\beta t} + 2\beta e^{-\beta t} dQ/dt - 2\beta^2 Qe^{-\beta t} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\Rightarrow d^2Q/dt^2 + (\omega_0^2 - \beta^2)Q = 0,$$

которое представляет собой дифференциальное уравнение гармонических колебаний величины  $Q$ :  $Q = Q_M \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

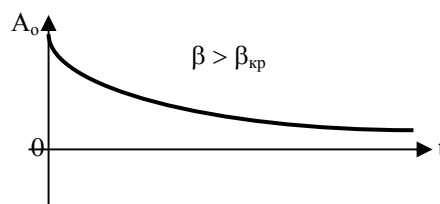
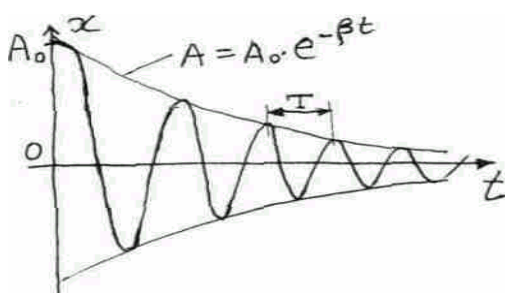
Возвращаясь к исходной переменной - заряду  $q$ , получим:

$$q = Qe^{-\beta t} = Q_M e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) = q_M(t) \cos(\omega t + \varphi),$$

Колебания заряда происходят по гармоническому закону, но с экспоненциально убывающей во времени амплитудой. Частота затухающих колебаний  $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \beta^2)}$

понижается с ростом затухания (затухание уменьшает среднюю силу разрядного и перезарядного тока в контуре и затягивает тем самым процессы разряда и перезаряда конденсатора, увеличивает период колебаний, уменьшает их частоту).

Для большого затухания  $\beta > \omega_0$  процесс возвращения системы к состоянию равновесия перестает быть колебательным (частота колебаний становится мнимой); имеет место процесс релаксации - аperiодического, монотонного возвращения системы к положению равновесия (монотонный разряд конденсатора; вся энергия разрядного тока успевает перейти в теплоту, рассеяться на резисторе за время меньше периода колебаний).



Коэффициент затухания является характеристикой, мерой быстроты убывания амплитуды колебаний. Численно он равен обратному времени релаксации  $\tau$  - времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается  $e = 2,72$  раз:

$$q_{M\tau}/q_{M0} = e^{-\beta\tau} = e^{-1} = 1/e$$

Коэффициент затухания и время релаксации - не очень адекватные характеристики затухания, ибо не соотношены с «естественным» временным масштабом самих колебаний - их периодом  $T$ . Поэтому вводят еще такую меру затухания амплитуды колебаний, как декремент  $D$  затухания, численно равный отношению двух «соседних» амплитуд, то есть амплитуд, разделенных во времени периодом  $T$ :

$$D = q_M(t)/q_M(t+T) = q_{M0}e^{-\beta t}/q_{M0}e^{-\beta(t+T)} = e^{-\beta t}/(e^{-\beta t} \cdot e^{-\beta T}) = e^{\beta T}$$



Еще более удобной характеристикой затухания колебаний является *логарифмический декремент затухания*  $\theta = \ln D = \beta T$  Его наглядная интерпретация - величина обратная числу колебаний  $N_e$ , совершающихся за время релаксации  $\tau$ . Действительно:

$$\theta = \beta T = T/\tau = 1/(\tau/T) = 1/N_e, \text{ где } \boxed{N_e = \tau/T}.$$

Рассмотрим фазовые соотношения между колебаниями заряда и силы тока в реальном контуре (с потерями энергии, с затуханием).

$$q = q_{mo} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$I = dq/dt = q_{mo} \cdot (-\beta) e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega q_{mo} \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = q_{mo} \cdot e^{-\beta t} \{-\beta \cos(\omega t + \varphi) - \omega \sin(\omega t + \varphi)\} = \omega_0 q_{mo} \cdot e^{-\beta t} \{(-\beta/\omega_0) \cos(\omega t + \varphi) - \omega/\omega_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)\} = \omega_0 q_{mo} \cdot e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi + \Psi)$$

$$\begin{aligned} (-\beta/\omega_0) &= \cos \Psi; & \omega/\omega_0 &= \sin \Psi \\ \text{tg } \Psi &= -\omega/\beta \end{aligned}$$

$\Psi$  - угол сдвига фаз между колебаниями заряда и силы тока.

Ток опережает по фазе заряд на угол  $\Psi$ , зависящий от  $\beta$  и  $\omega$ . При  $\beta = 0$  (нет потерь, затухания)  $\Psi = \pi/2$ .

## Вынужденные колебания. Резонанс.

Для получения незатухающих электромагнитных колебаний в контуре к нему необходимо извне подводить энергию, компенсирующую потери на джоулево тепло в электросопротивлении. Для этого к контуру подключают внешний источник переменного тока, который создает в нем *вынужденные колебания* заряда и тока. Рассмотрим особенности вынужденных колебаний в R-L-C контуре при подключении к нему внешнего источника с гармонически изменяющейся ЭДС  $\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t$ .

Дифференциальное уравнение колебаний заряда в R-L-C контуре можно получить на основе как энергетического, так и «силового» подходов. С энергетических позиций мощность источника тока  $P_{и} = \varepsilon I$  расходуется на изменение электрической и магнитной  $W_m$  энергий конденсатора и катушки и на восполнение джоулевых потерь  $P_R$  в электросопротивлении:

$$P_{и} = d/dt(W_{э} + W_m) + P_R \quad \Rightarrow \quad P_{и} = d/dt (q^2/2C + LI^2/2) + I^2R$$

Произведя преобразования, аналогичные проведенным ранее при анализе свободных и затухающих колебаний, получим в итоге каноническую форму *дифференциального уравнения вынужденных колебаний заряда*:

$$\boxed{d^2q/dt^2 + 2\beta \cdot dq/dt + \omega_0^2 \cdot q = (\varepsilon_m/L) \cos \omega t}$$

Полученное уравнение является неоднородным, и его решение состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения (с полагаемой нулю правой частью) и частного решения неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения было уже рассмотрено и проанализировано ранее при анализе затухающих колебаний. Оно имеет место на этапах установления стационарного режима вынужденных колебаний. В установившемся же режиме характер колебаний заряда будет определяться (навязываться) правой частью неоднородного уравнения, то есть внешней ЭДС, играющей роль вынуждающей силы. Эти *вынужденные колебания* заряда будут происходить по закону внешней ЭДС (гармоническому), то есть с ее частотой  $\omega$  и с возможным отставанием по начальной фазе на некоторый угол  $\varphi$ :

$$q = q_m \cos(\omega t - \varphi)$$

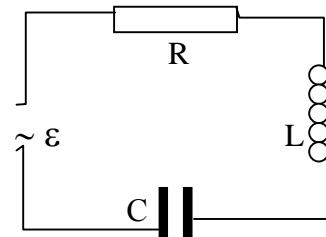
Задача заключается в отыскании амплитуды  $q_m$  и начальной фазы  $\varphi$  вынужденных колебаний и в выявлении их зависимости от характеристик вынуждающей ЭДС и собственных характеристик колебательного контура.

Подставив в дифференциальное уравнение вынужденных колебаний заряда первую  $q'$  и вторую  $q''$  производные от  $q = q_m \cos(\omega t - \varphi)$ , получим:

$$\omega^2 q_m \cos(\omega t - \varphi) - 2\omega\beta q_m \sin(\omega t - \varphi) + \omega_0^2 q_m \cos(\omega t - \varphi) = (\varepsilon_m/L) \cos \omega t.$$

Приведем все тригонометрические функции к единой - косинусу:

$$\omega^2 q_m \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\omega\beta q_m \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + \omega_0^2 q_m \cos(\omega t - \varphi) = (\varepsilon_m/L) \cos \omega t.$$



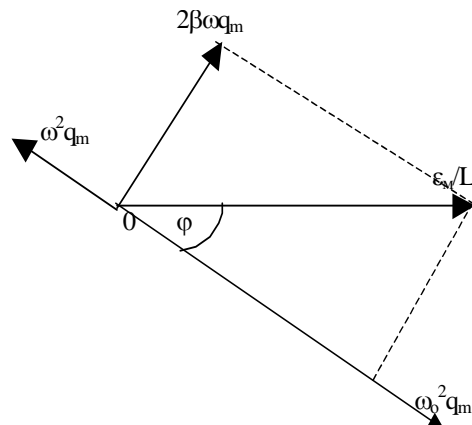
Получили тригонометрическое равенство, в котором сумма трех гармонических функций - колебаний одинаковой частоты, приравнивается к четвертой - вынуждающей «силе». Решение такого уравнения удобно провести с помощью векторной диаграммы. На ней гармоническое колебание изображается в виде вектора, модуль (длина) которого равна амплитуде колебания и который вращается вокруг оси (X или Y) с угловой скоростью, равной частоте  $\omega$  колебания, будучи в начальный момент наклоненным к оси под углом, равным начальной фазе колебания. Так как все колебания имеют одинаковую частоту, изображающие их векторы будут вращаться с одинаковой скоростью, и их относительная взаимориентация с течением времени будет оставаться неизменной.

Векторная диаграмма позволяет заменить сложение гармонических функций (колебаний) одинаковой частоты сложением векторов, что значительно проще и нагляднее. Изобразим на векторной диаграмме связь гармонических функций, даваемую уравнением вынужденных колебаний.

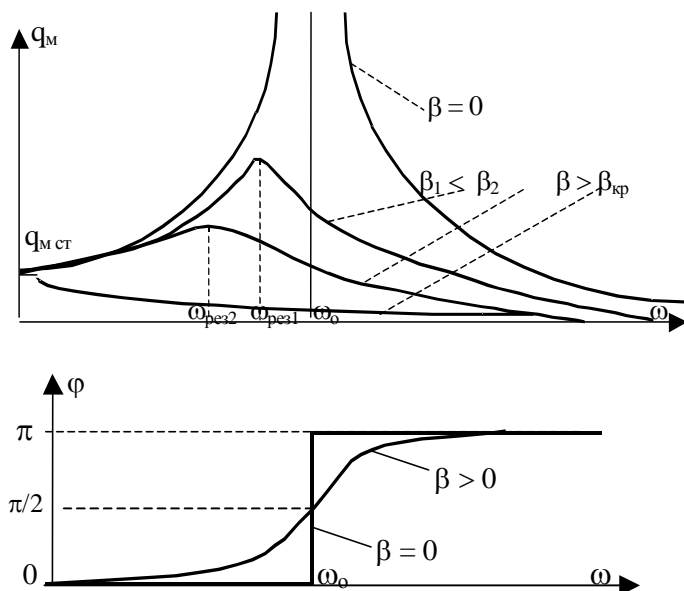
Из векторных диаграмм выражаем искомые начальную фазу  $\varphi$  и амплитуду  $q_M$  вынужденных колебаний заряда в контуре:

$$\operatorname{tg} \varphi = 2\omega\beta q_M / [(\omega_0^2 - \omega^2)q_M]; \Rightarrow \boxed{\varphi = \operatorname{arctg} \{ 2\omega\beta / [(\omega_0^2 - \omega^2)] \}}$$

$$(\varepsilon_M/L)^2 = [(\omega_0^2 - \omega^2)q_M + (2\omega\beta q_M)^2] \Rightarrow \boxed{q_M = (\varepsilon_M/L) / \sqrt{[(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2\beta^2]}}$$



Полученные выражения показывают, что амплитуда и фаза вынужденных колебаний заряда в контуре зависят от коэффициента затухания  $\beta$  и соотношения частот  $\omega_0$  и  $\omega$  (свободных колебаний и вынуждающей силы). Графики зависимостей  $q_M(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , называемые, соответственно, амплитудно- и фазочастотными характеристиками (АЧХ и ФЧХ) заряда для разных значений коэффициента затухания  $\beta$ , играющего роль параметра в зависимостях  $q_M(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ , имеют следующий вид:



На графике зависимости амплитуды  $q_M$  вынужденных колебаний заряда в контуре от частоты  $\omega$  внешнего источника имеет место максимум. Это явление или особенность АЧХ называют *резонансом*. Резонансная частота  $\omega_p$ , соответствующая максимуму  $q_M$ , формально определяется из условия экстремума функции  $q_M(\omega)$ :

$$q_M(\omega)' = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_p = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} \quad (\omega \leq \omega_0)$$

Затухание колебаний, его мера - коэффициент  $\beta$  - понижает резонансную частоту  $\omega_p$  и уменьшает резонансную амплитуду  $q_{Mр}$  вынужденных колебаний заряда в контуре (с увеличением

$\beta$  максимумы АЧХ понижаются и смещаются в область меньших частот - резонанс «левет» и «тупеет»).

Резонансную амплитуду  $q_{M p}$  найдем, подставляя в формулу  $q_M(\omega)$  значение резонансной частоты  $\omega_p = \sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2)}$ :

$$q_{M p} = (\varepsilon_M / 2\beta L) / \sqrt{(\omega_p^2 - \beta^2)}.$$

В отсутствие затухания (при  $\beta = 0$ ) значение резонансной амплитуды  $q_{M p} = \infty$ . Это естественный результат, реакция вынужденных колебаний на вынуждающую силу в отсутствие диссипации, поглощения энергии внешнего источника, которое только и может ограничить амплитуду вынужденных колебаний.

При  $\omega = 0$  имеем статический случай с внешним источником постоянного тока. На конденсаторе имеет место статический заряд

$$q_{M 0} = q_{M ст} = C\varepsilon_M = \varepsilon_M / \omega_0^2 L \quad (\omega_0^2 = 1/LC)$$

При  $\omega = \infty$  амплитуда вынужденных колебаний заряда равна нулю; вследствие инертности и диссипации они не успевают «раскачиваться» с бесконечно высокой частотой, скоростью.

При достаточно большом затухании  $\beta > \beta_{кр} = \omega_0 / \sqrt{2}$  резонансная частота становится мнимой; вместо резонансной зависимости (с максимумом) имеет место монотонный спад амплитуды вынужденных колебаний заряда при увеличении частоты внешнего источника. Диссипация, то есть необратимый перевод в тепло энергии внешнего источника, преобладает здесь над упругостью и инертностью.

Анализ фазочастотной характеристики показывает, что вынужденные колебания всегда отстают по фазе от вынуждающей силы (следствие всегда запаздывает от причины). Это отставание-запаздывание увеличивается с ростом затухания в колебательной системе. При нулевом затухании ( $\beta = 0$ ) угол  $\varphi$  отставания по фазе вынужденных колебаний заряда от внешней ЭДС скачком изменяется на  $\pi$  (от 0 до 180°) при  $\omega = \omega_0$ , то есть на частоте собственных колебаний системы (контура). На частотах меньших  $\omega_0$  колебания заряда в контуре совпадают по фазе с вынуждающей ЭДС, а на частотах, превышающих  $\omega_0$ , заряд колеблется в противофазе с колебаниями внешнего источника.

Колебания силы тока  $I = q'$  в контуре также носят резонансный характер, то есть их зависимость от частоты вынуждающей ЭДС имеет максимум. Но, в отличие от резонанса заряда, резонанс тока в контуре всегда происходит на одной частоте, равной частоте  $\omega_0$  свободных колебаний в контуре. Формально это связано с тем, что в выражении для амплитуды силы тока  $I_M = \omega q_M$  появляется еще один множитель - частота  $\omega$ . Поэтому характер частотной зависимости  $I_M(\omega)$  становится отличным от  $q_M(\omega)$ :

$$I = dq/dt = -\omega q_M \sin(\omega t - \varphi) = I_M \cos(\omega t - \varphi + \pi/2),$$

$$\text{где } I_M = \omega q_M = (\omega \varepsilon_M / L) / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \beta^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dI_M/dt = 0 \text{ при } \omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

В чем же причины и физический механизм такого специфического эффекта, как резонанс? Почему вынужденные колебания особенно эффективно возбуждаются на определенной частоте вынуждающей силы? Как и в случае механических колебаний причины резонанса электромагнитных колебаний (заряда и тока) кроются в фазовых соотношениях, то есть резонанс является эффектом амплитудно-фазовым. На резонансной частоте вынужденные колебания силы тока, то есть быстроты, скорости колебаний заряда, оказываются сфазированными с колебаниями внешнего источника, возбуждающего вынужденные колебания в контуре. Колебания же заряда, которые отстают по фазе от колебаний тока на  $\pi/2$ , на резонансной частоте отстают на  $\pi/2$  и от колебаний внешнего источника.

Именно на резонансной частоте создаются наиболее благоприятные, оптимальные условия для перекачки энергии внешнего источника в контур, для потребления ее на раскачку собственных колебаний в контуре. На резонансной частоте вынуждающая сила в течение всего периода колебаний действует в направлении (синфазно, синхронно) скорости (перемещения) вынужденных колебаний и совершает максимальную работу по их раскачке, наращиванию их амплитуды. Из механики следует, что источник развивает наибольшую мощность  $N$

$$N = dA/dt = \vec{F} d\vec{r}/dt = \vec{F} \vec{v} = F v \cos \varphi,$$

когда сила сонаправлена со скоростью перемещаемого тела. В случае гармонического характера воздействия (и отклика) эта сонаправленность выражается в сфазированности (синфазности) во времени вынуждающей силы и скорости вынужденных колебаний.

На частотах как меньших, так и больших резонансной, то есть при  $\omega \neq \omega_p$ , сфазированность внешнего источника и вынужденных колебаний нарушается. При этом лишь часть периода внешний источник совершает положительную работу по раскачке вынужденных колебаний в контуре; в течение же другой части эта работа оказывается отрицательной, тормозящей вынужденные колебания. При  $\omega \rightarrow \infty$  отставание вынужденных колебаний по фазе от вынуждающей силы достигает  $180^\circ$  и положительная работа внешнего источника сравнивается с его отрицательной работой, результатом чего является стремление амплитуды вынужденных колебаний к нулю (вынужденные колебания не возбуждаются).

## МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

### Магнитные моменты атомов. Типы магнетиков. Особенности диа- и парамагнетизма.

Вещественные тела состоят из атомов, а в состав атомов входят движущиеся заряженные частицы - электроны и протоны. Внутриатомное движение этих частиц может быть подразделено на орбитальное и собственное, называемое ещё спиновым. Так, например, электрон в атоме вращается вокруг ядра, а также обладает собственным (внутренним) вращением. Каждое из этих вращательных движений может быть уподоблено некоторому круговому витку с током, магнитной характеристикой которого служит магнитный момент  $P_m = ISn$ . Например для орбитального движения электрона:

$I = q_e/T = ev$ , а  $S = \pi r^2$ , где  $q = -1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона,  $T$  и  $v$  - период и частота вращения электрона, соответственно, а  $r$  – радиус круговой орбиты электрона в атоме.

Магнитный момент характеризует и собственное (спиновое) вращение, как электрона, так и протона, а также и нейтрона, хотя последний и является электрически незаряженной частицей.

Таким образом, наличие магнитных характеристик (магнитных моментов) является неотъемлемой особенностью всех элементарных частиц, входящих в состав атомов. Соответственно, все вещественные тела могут, как создавать собственное магнитное поле, так и взаимодействовать с внешним магнитным полем. Мерой способности вещественных тел создавать собственное и взаимодействовать с внешним магнитным полем, является магнитная проницаемость вещества  $\mu$ , численно равная отношению индукции  $B_0$  магнитного поля в вакууме, к индукции  $B$  магнитного поля в веществе (однородном и изотропном):

$$\mu = B_0/B$$

В зависимости от величины магнитной проницаемости все вещества (их можно называть магнетиками) делятся на слабые, у которых магнитная проницаемость незначительно отличается от единицы, и сильные, у которых магнитная проницаемость много больше единицы.

Слабые магнетики, в свою очередь, делят на:

- диамагнетики, у которых магнитная проницаемость чуть меньше единицы и
- парамагнетики, у которых магнитная проницаемость чуть больше единицы.

При помещении вещества в магнитное поле оно, взаимодействуя с ним, "откликается" созданием собственного магнитного поля (то есть намагничивается). В слабых магнетиках собственное магнитное поле много меньше внешнего магнитного поля, и, в результате, суммарное магнитное поле в веществе незначительно отличается от внешнего (в отсутствии вещества).

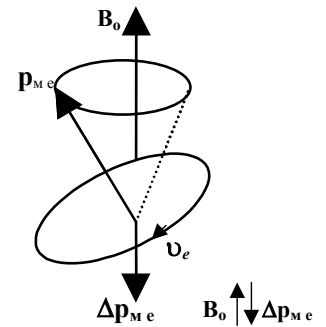
В диамагнетиках собственное магнитное поле, возникающее в результате взаимодействия вещества с внешним магнитным полем, направлено против внешнего поля и в результате суммарное магнитное поле в диамагнетике меньше, чем в вакууме. Это соответствует значениям магнитной проницаемости меньшим единицы. У таких характерных диамагнетиков, как висмут, медь, вода, стекло, она составляет соответственно: 0,9996; 0,99999; 0,99999..

Также, как и поляризация диэлектриков внешним электрическим полем, намагничивание магнетиков может осуществляться двумя способами, механизмами - индуцированным и ориентационным. В результате того и другого, образец вещества приобретает ненулевой результирующий

магнитный момент. Мерой намагниченного состояния вещества выбирается величина  $\mathbf{J}$ , называемая намагниченностью, численно равная магнитному моменту единицы объёма веществ:  $\mathbf{J} = \Sigma \mathbf{P}_{\text{мл}} / V$ , где  $\mathbf{P}_{\text{мл}}$  - магнитный момент  $i$ -го атома вещества, а  $N$  и  $V$  - общее число атомов вещества и его полный объём, соответственно.

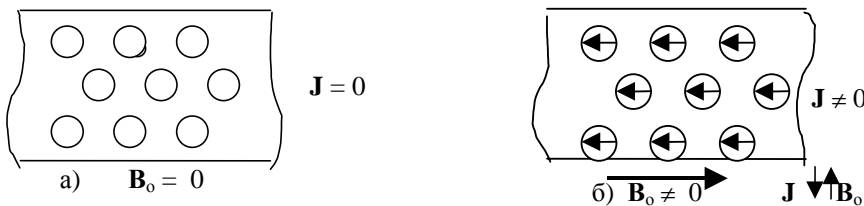
Диамагнетизм в чистом виде наблюдается у веществ, атомы которых в отсутствие внешнего магнитного поля обладают нулевым результирующим магнитным моментом. Объяснение механизму взаимокompенсации магнитных моментов совокупности электронов, входящих в атом, даёт квантовая механика.

Диамагнетизм связан с тем, что электрон в атоме является не просто носителем магнитного момента, то есть магнитной стрелкой, но, и обладает механическим моментом (моментом импульса.), то есть, представляет собой как бы волчок или гироскоп. И при включении внешнего магнитного поля, которое пытается повернуть магнитный момент электрона, в своём направлении, характер вращательного движения электрона становится прецессирующим, то есть ось вращения электрона сама начинает вращаться вокруг направления индукции внешнего поля. Такая прецессия (ещё её называют ларморовой прецессией) сопровождается появлением дополнительного магнитного момента электрона, направленного против внешнего магнитного поля. Иначе, механизм диамагнетизма можно в классических терминах истолковать и как индуцирование включаемым внешним магнитным полем токов и связанных с ними магнитных моментов электронов, направленных по правилу Ленца так, чтобы противодействовать причине их вызвавшей, породившей. В итоге в диамагнетике создаётся собственное магнитное поле, направленное против внешнего и ослабляющее суммарное магнитное поле внутри диамагнетика. Схематически это можно



изобразить так.

$$\begin{aligned} B &= B_0 - B'; & B' &= \mu_0 J; & B &= \mu_0(H - J); & \mu &= B/B_0 = 1 - \\ & & & & & & & B'/B_0 = 1 - J/H \end{aligned}$$



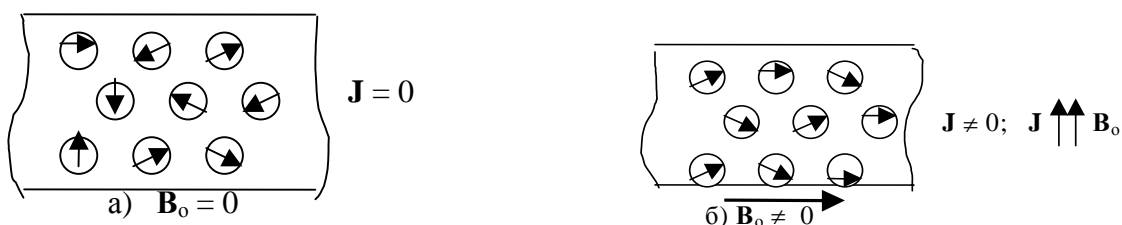
Индукцированные

внешним магнитным полем

магнитные моменты электронов диамагнетика и в целом намагниченность вещества практически не зависят от температуры, что отличает диамагнетизм от пара- и ферромагнетизма.

У ряда веществ, атомы которых обладают ненулевым магнитным моментом в отсутствие внешнего магнитного поля, диамагнитный эффект перекрываете и маскируется более сильным парамагнитным эффектом. К таким веществам относят вещества с нечётным числом электронов, например алюминий, щелочные металлы, вольфрам и другие. Магнитная проницаемость у парамагнетиков незначительно (на доли процента) больше единицы. У наиболее сильного парамагнетика - жидкого кислорода магнитная проницаемость равна 1,0034.

Парамагнетики являются магнитными аналогами полярных диэлектриков, и механизм их намагничения носит ориентационный характер. При помещении во внешнее магнитное поле на магнитные моменты атомов действует со стороны магнитного поля вращающий момент, который и поворачивает, ориентирует их в направлении индукции внешнего поля. В результате образец парамагнетика намагничивается в направлении внешнего магнитного поля, то есть его собственное магнитное поле направлено так же как внешнее, и суммарное магнитное поле в веществе больше, чем в вакууме. Ориентирующему действию внешнего магнитного поля препятствует разупорядочивающее действие хаотического теплового движения. В результате действия этих противоположных факторов достигается некоторое динамическое равновесие, которое смещается в ту или иную сторону при увеличении либо температуры, либо индукции внешнего магнитного поля.



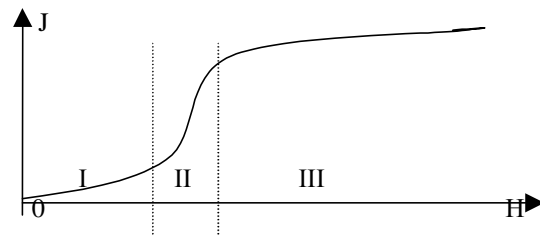
Схематически механизм намагничения парамагнетика представлен на рис.

$$B = B_0 + B'; \quad B' = \mu_0 J; \quad B = \mu_0 (H + J); \quad \mu = B/B_0 = 1 + B'/B_0 = 1 + J/H$$

## Ферромагнетики. Домены и спиновая природа ферромагнетизма. Кривая намагничивания и магнитный гистерезис. Точка Кюри.

Ферромагнетики явились исторически первыми изученными представителями сильных магнетиков. К ним относят железо, кобальт, никель, гадолиний. Магнитная проницаемость у этих веществ составляет сотни и тысячи, то есть в них под действием внешнего магнитного поля возникает сильное собственное магнитное поле, со направленное внешнему магнитному полю и многократно усиливающее его. Природа, ферромагнетизма долгое время оставалась загадкой и тайной для физиков, которая была раскрыта лишь в нашем столетии после создания квантовой механики, вскрывшей специфические законы движения и взаимодействия микрообъектов во внутриатомных масштабах.

В некоторых веществах (к ним относят так называемые переходные металлы) энергетически выгодным при не очень высоких температурах оказывается параллельная ориентация собственных (спиновых) магнитных моментов в пределах отдельных макроскопических областей образца, называемых доменами. В отсутствие внешнего магнитного поля образец ферромагнетика под действием теплового движения обычно оказывается размагниченным, то есть намагниченность в разных доменах ориентирована случайным образом и по всему образцу оказывается равной нулю. Внутри же каждого домена образец намагничен до насыщения и обладает значительным магнитным моментом. Поэтому при наложении внешнего магнитного поля на каждый домен действует большой вращающий момент, стремящийся сориентировать магнитный момент домена в направлении внешнего магнитного поля. С ростом индукции (напряжённости) внешнего магнитного поля намагниченность образца ферромагнетика растёт нелинейным образом и достигает состояния насыщения. Кривая, изображающая зависимость  $J(H)$ , называемая кривой намагничивания, изображена на рис.



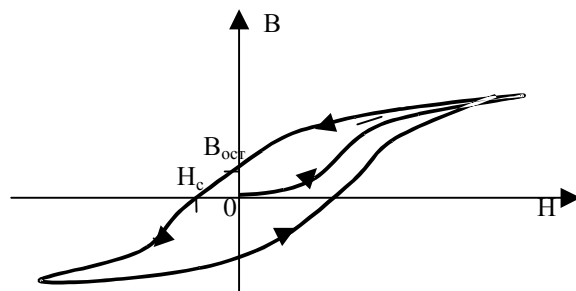
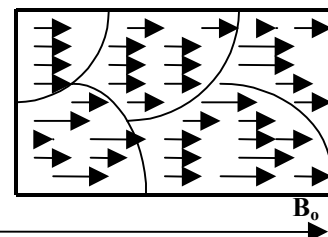
На этой кривой выделяют три участка. На первом участке намагниченность растёт не очень быстро. Здесь происходит так называемый рост доменов "выгодно, ориентированных", магнитные моменты которых близки по направлению к индукции внешнего магнитного поля, за счёт «невыгодно» ориентированных доменов. На втором участке кривой намагничивания ферромагнетика внешнее магнитное поле становится достаточно сильным для поворотов, переориентации "невыгодных доменов" в целом в своём направлении. Здесь имеет место скачкообразная переориентация магнитных моментов целых доменов. С этими скачками в изменении магнитного момента образца (его намагниченности) и называемыми скачками Баркгаузена, связаны звуковые эффекты в виде треска, щелчков в наушниках, подключенных к образцу ферромагнетика.

На третьем участке достигается насыщение: все домены сориентировали свои магнитные моменты в направлении внешнего магнитного поля.

$$B \neq 0; \quad J \neq 0; \quad \mathbf{J} \parallel \mathbf{B}_0$$

Схематически намагничение ферромагнетика представлено на рисунке. Зависимость индукции результирующего магнитного поля в ферромагнетике от напряжённости внешнего поля так же, как и кривая намагничивания, носит нелинейный и неоднозначный характер. Если образец ферромагнетика первоначально был размагничен, то зависимость  $B(H)$  имеет вид, представленный на рис.

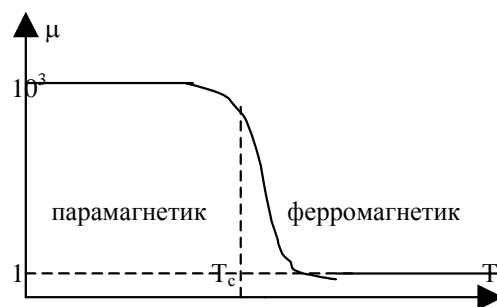
С ростом напряжённости внешнего магнитного поля индукция результирующего магнитного поля в ферромагнетике нелинейно растёт вплоть до участка насыщения. Если же затем напряжённость внешнего поля уменьшить до нуля, индукция результирующего магнитного поля не уменьшится до нуля, а сохранит некоторое значение  $B_{ост}$ ,



называемое остаточной индукцией. Это явление интерпретируется как магнитная вязкость; часть доменов как бы вязнет, застревает в своей предыдущей ориентированности сильным внешним магнитным полем. Теплового же движения оказывается недостаточно для полной разориентации доменов, для размагничивания образца ферромагнетика. Такой образец представляет собой постоянный магнит. Размагнитить его можно либо механической встряской (ударом), либо тепловой, то есть нагревом до значительной температуры, либо же приложением внешнего поля, противоположного первоначальному направлению. Величина соответствующей напряжённости  $H_c$  (см, рис.) называется коэрцитивной силой.

Если напряжённость внешнего магнитного поля циклически менять в значительных пределах, при которых достигается состояние насыщения (все домены сориентировали свои магнитные моменты в направлении внешнего магнитного поля), то зависимость  $B(H)$  изображается замкнутой петлеобразной кривой, называемой петлёй гистерезиса.

Ферромагнитное состояние, то есть самопроизвольная, спонтанная сориентированность магнитных моментов всех атомов в пределах домена, сохраняется лишь в определённом диапазоне температур, ограниченном сверху температурой  $T_c$  называемой температурой Кюри. При этой температуре тепловое разупорядочивающее движение атомов становится столь интенсивным, что превышает упорядочивающее действие квантовомеханических, так называемых обменных сил, и домены распадаются на разупорядоченные атомы; ферромагнетик превращается в парамагнетик:  $T_{cFe} = 1040$ ,  $T_{cCo} = 730$  К.



## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ИНДУКТИВНОСТЬ.

При замыкании ключа  $K$  в цепи, состоящей из последовательно соединённых резистора  $R$ , катушки  $L$  и источника тока  $\varepsilon$  протекает ток, сила  $I$  которого, в соответствии с законом Ома для замкнутой цепи, равна:

$$I = (\varepsilon + \varepsilon_{сн}) / R = (\varepsilon - LdI/dt) / R$$

Разделяя переменные  $I$  и  $t$  в полученном дифференциальном соотношении, будем иметь:

$$dI(\varepsilon - IR) = dt/L$$

Интегрируем полученное равенство:  $\int dI(\varepsilon - IR) = \int dt/L \Rightarrow \ln(\varepsilon - IR) = -Rt/L + \ln C$ .

Постоянную интегрирования  $C$  найдём из начального условия, в соответствии с которым в начальный момент  $t = 0$ ,  $I = I_0$ . Тогда  $(\varepsilon - I_0R) = C$  и  $(\varepsilon - IR) = (\varepsilon - I_0R)e^{-RL/t} \Rightarrow$

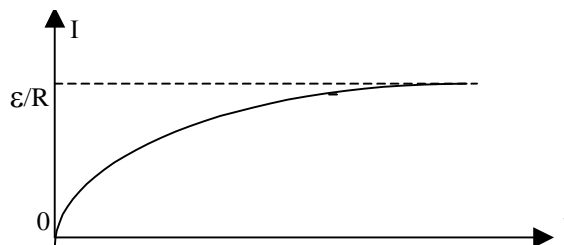
$$I = I_0 e^{-RL/t} + (\varepsilon/R)(1 - e^{-RL/t}).$$

В соответствии с полученным общим выражением для силы тока в цепи, содержащей индуктивность, имеем два различных процесса:

а) включение источника тока:  $I_0 = 0$ .

$$I = (\varepsilon/R)(1 - e^{-RL/t}).$$

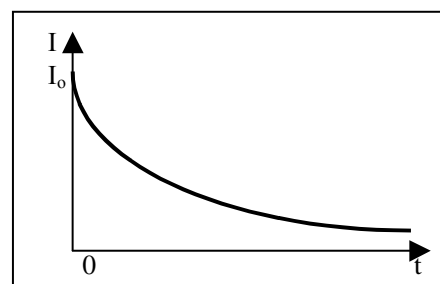
Сила тока в цепи монотонно нарастает до установившегося (стационарного) значения, равного  $I_{уст} = \varepsilon/R$ . Катушка индуктивности, как это и должно быть в соответствии с явлением самоиндукции, препятствует мгновенному нарастанию силы тока в цепи, последовательно в которую она включена. Индуктивность играет роль инертного элемента, является магнитным аналогом массы, выступает мерой замедленности быстроты (скорости) изменений силы тока, пропускаемого через неё.



б) выключение источника тока:  $\varepsilon = 0$ .

В этом случае из общей формулы для силы тока получаем:

$$I = I_0 e^{-RL/t}$$



Здесь индуктивность также не позволяет току мгновенно измениться (упасть, убыть) до нуля. И, несмотря на то, что источник тока выключен, и нет электрических сил, обеспечивающих перемещение электрических зарядов, то есть протекание тока в цепи, он продолжает течь за счёт энергии магнитного поля, накопленной катушкой. Или, иначе говоря, ЭДС самоиндукции в катушке, противодействуя убыванию тока в ней, создаёт ток, поддерживающий ток "выключения" в цепи.

## УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Про классическую теорию электромагнитного взаимодействия и его переносчика - электромагнитное поле - говорят иногда, что электродинамика Максвелла - это уравнения Максвелла.

В 60-ых годах прошлого столетия Максвелл выполнил работу, подобную той, которую два века до него осуществил Ньютон. Если Ньютон создал (точнее, довершил создание) первую фундаментальную теорию движения, то Максвелл завершил создание первой теории физического взаимодействия (электромагнитного). Подобно классической механике Ньютона, в основу электродинамики Максвелла также были положены некоторые предельно фундаментальные и элементарные соотношения, выраженные уравнениями, получившими имя Максвелла.

Эти уравнения имеют две формы - интегральную и дифференциальную своего выражения и фактически они выражают взаимосвязь характеристик электромагнитного поля с характеристиками источников (зарядов и токов), это поле порождающих. Эта связь не имеет такого простого выражения, как, например связь мер движения и взаимодействия, выражаемая основным законом динамики- вторым законом Ньютона. Поэтому уравнения Максвелла, выражающие основную идею электродинамики - учения об электромагнитном взаимодействии - появляются при её изучении в вузе лишь в конце курса.

Как и любые другие, предельно общие теоретические положения, уравнения Максвелла в рамках самой электродинамики формально не выводятся. Они получаются как результат творческого обобщения разнообразного опытно-экспериментального материала, и их правильность подтверждается различными следствиями и практическими приложениями.

До Максвелла была известна, полная система уравнений электро- и магнитостатики и одно уравнение электродинамики - уравнение, выражающее закон электромагнитной индукции. В целом же эта совокупность уравнений не являлась полной системой, однозначно задающей состояние электромагнитного поля. Для получения такой системы Максвелл произвёл обобщение закона электромагнитной индукции  $\varepsilon = - d\Phi/dt$ , записав его уравнение в интегральной форме:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S (d\vec{B}/dt)d\vec{S} \quad \text{или, в скалярной форме} \quad \oint_L E_l dl = - \int_S (dB_n/dt)dS$$

Полученное уравнение можно представлять себе как обобщённую на вихревое электрическое поле, теорему о циркуляции вектора  $\vec{E}$ . Здесь Максвелл фактически выбросил проводящий контур, который был у Фарадея и который, по Максвеллу, являлся просто индикатором наличия (по индукционным токам) вихревого электрического поля в области вокруг изменяющегося магнитного поля.

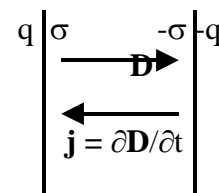
В представленной Максвеллом форме закона электромагнитной индукции более выпукло просвечивает физическая суть явления, согласно которому переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое (с ненулевой циркуляцией) электрическое поле. Представив так явление электромагнитной индукции, Максвелл смог, оперевшись на соображения симметрии, предположить наличие в природе и обратного электромагнитной индукции эффекта, который можно назвать магнитоэлектрической индукцией, и согласно которому, изменяющееся во времени электрическое поле, порождает в окружающем пространстве магнитное поле. Формально это записывается так, что циркуляция напряженности магнитного поля равна скорости изменения во времени потока индукции электрического поля. С учётом же того, что магнитное поле с самого начала (со статического состояния) является вихревым, то есть для него циркуляция уже не равна нулю, обобщённая взаимосвязь магнитного и электрического полей примет вид:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + I_{cm}, \quad \text{где} \quad I_{cm} = \int_S (\partial \mathbf{D} / \partial t)_n dS$$



Здесь быстрота изменения потока индукции электрического поля формально эквивалентна некоторому току. Этот ток называют током смещения. Можно представить, что этот ток как бы замыкает протекание тока в цепи, например, с конденсаторами, через которые обычный ток проводимости не протекает. Плотность тока смещения  $j_{см}$  численно равна быстроте изменения электрического смещения (вектора  $D$ ):  $j_{см} = (\partial D/\partial t)$ . При разряде заряженного конденсатора по проводам протекает ток проводимости, и, кроме того, в пространстве между пластинами убывает (изменяется) электрическое поле.

Быстрота же изменения индукции электрического поля, то есть  $\partial D/\partial t$  и есть плотность тока смещения. Ток смещения замыкает ток проводимости в разрывах между проводниками. Он, как и ток проводимости, создаёт вокруг себя магнитное поле, а в диэлектрике (там его называют поляризационным током) он выделяет тепло - так называемые диэлектрические потери.



Итак, теперь мы можем записать полную систему уравнений единого электромагнитного поля - систему уравнений Максвелла:

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S (d\vec{B}/dt) d\vec{S} \qquad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = I + \int_S (\partial \mathbf{D} / \partial t)_n dS$$

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q_\Sigma \qquad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

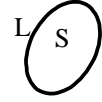
Первые два уравнения этой системы отражают динамический аспект электромагнитного поля, а последние два - статический аспект. Если в статическом варианте электрическое поле порождается только неподвижными (или равномерно движущимися) в данной ИСО электрическими зарядами и является потенциальным (обладает нулевой циркуляцией), то магнитное поле порождается только токами и всегда является непотенциальным (вихревым). В статическом случае электрическое поле, имея своими источниками заряды, имеет начало своих силовых линий на положительных зарядах и конец - на отрицательных зарядах (или в бесконечности).

Магнитное же поле не имеет таких источников, поскольку магнитных монополей до сих пор не обнаружено, и потому его силовые линии даже в статическом состоянии являются замкнутыми, не имея ни начала, ни конца.

В динамическом же состоянии, когда источники полей и сами, порождаемые ими поля, становятся изменяющимися во времени, выявляется новая принципиальная особенность электрического и магнитного нестационарных полей. Выясняется, что в этом состоянии они приобретают способность порождать друг друга, становиться источниками друг для друга. В результате возникает новое неразрывно взаимосвязанное состояние единого электромагнитного поля. Первое уравнение Максвелла, как уже говорилось, указывает на то, что изменяющееся во времени магнитное поле, порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле. Второе же уравнение Максвелла говорит о том, что магнитное поле порождается не только токами, но и переменным во времени электрическим полем. В итоге мы можем заключить, что переменные (нестационарные) электрическое и магнитное поля являются взаимными источниками друг друга и их различие во многом относительно. В нестационарном состоянии они способны существовать совершенно самостоятельно от источников (переменных токов) их породивших, в виде единого неразрывного электромагнитного поля.

Последние два уравнения Максвелла указывают на разный характер симметрии электрического и магнитного стационарных полей.

Для решения основной задачи электродинамики, уравнения Максвелла, выражающие её основную идею (связь характеристик поля с характеристиками его источников), должны быть дополнены так называемыми материальными уравнениями, связывающими характеристики поля с характеристиками вещественной среды. Этими уравнениями являются следующие:  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ ;  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  и  $\mathbf{j} = \gamma \vec{E}$ , где  $\epsilon$  и  $\mu$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, а  $\gamma$  - удельная электропроводность среды.



Уравнения Максвелла, часто записывают в более компактной - дифференциальной форме, которая получается из интегральной формы путём предельного перехода контуров и поверхностей интегрирования к нулю:  $S \rightarrow 0$

Введем векторный оператор, называемый "набла" и обозначаемый  $\nabla$ , как вектор со следующими компонентами:  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ .

Для любого векторного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (A_x, A_y, A_z)$  важными являются следующие совокупности дифференциальных операций:

а) скалярная, называемая *дивергенцией*  $\mathbf{A}$ :  $\nabla \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A} = \partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z$

б) векторная, называемая *ротором*  $\mathbf{A}$ :  $\nabla \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A} = \partial A_x/\partial y - \partial A_y/\partial x, \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x, \partial A_y/\partial z - \partial A_z/\partial y$

В этих обозначениях уравнения Максвелла в дифференциальной форме, примут следующий вид:

$$\text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t; \quad \text{rot } \vec{H} = \mathbf{j} + \partial \vec{D} / \partial t; \quad \text{div } \vec{D} = \rho; \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{или } \nabla \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t; \quad \nabla \vec{H} = \mathbf{j} + \partial \vec{D} / \partial t; \quad \nabla \vec{D} = \rho; \quad \nabla \vec{B} = 0$$

В уравнения Максвелла входят только свободные заряды  $\rho$  и токи проводимости  $\mathbf{j}$ . Связанные заряды и молекулярные токи входят через  $\epsilon$  и  $\mu$  в связи  $\vec{D}$  с  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  с  $\vec{H}$ .

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

**Объяснение возникновения электромагнитных волн с позиций уравнений Максвелла. Уравнение бегущей электромагнитной волны и её основные свойства и характеристики. Вывод волнового уравнения.**

Электромагнитные волны представляют собой распространяющиеся в пространстве взаимосвязанные колебания электрического и магнитного полей. В отличие от звуковых (акустических) волн, электромагнитные волны могут распространяться в вакууме, то есть в отсутствие вещественной среды.

Качественно механизм возникновения свободного (от источников в виде электрических зарядов и токов) электромагнитного поля может быть пояснён на основе анализа физической сущности уравнений Максвелла. В непроводящей среде, не содержащей электрических свободных зарядов и токов (такой средой может быть диэлектрик, непроводящий магнетик или вакуум), два фундаментальных эффекта, отображаемых уравнениями Максвелла - электромагнитная индукция (порождение переменным магнитным полем переменного вихревого электрического поля) и магнитоэлектрическая индукция (порождение переменным электрическим полем переменного магнитного поля) приводят к возможности электрического и магнитного переменных полей быть взаимными источниками друг друга. Взаимосвязанное изменение электрического и магнитного полей и представляет собой единое электромагнитное поле, которое способно в вакууме распространяться со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Это поле, способное существовать совершенно независимо от зарядов и токов и вообще от вещества, представляет собой второй - полевой вид (форму) существования материи наряду с веществом. Характерным для него является непрерывное (делокализованное) распределение в пространстве без каких либо конкретных размеров, формы, местоположения.

В опыте электромагнитные волны были обнаружены в 1886 г Г. Герцем, спустя 10 лет после смерти предсказавшего теоретически их существование Максвелла. Из уравнений Максвелла в непроводящей среде, где  $\rho = 0$  и  $\mathbf{j} = 0$ , взяв операцию ротора от первого и второго уравнений, получим:

$$\text{rot } \vec{E} = - \partial \vec{B} / \partial t = - \mu_0 \mu \partial \vec{H} / \partial t; \quad \text{rot rot } \vec{E} = - \mu_0 \mu \partial / \partial t \text{ rot } \vec{H} = - \mu_0 \mu \epsilon_0 \epsilon \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = - (1/v^2) \partial^2 \vec{E} / \partial t^2$$

$$\text{rot } \vec{H} = \partial \vec{D} / \partial t = \epsilon_0 \epsilon \partial \vec{E} / \partial t;$$

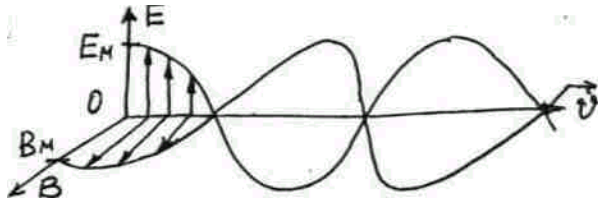
Из векторного анализа известно, что  $\text{rot rot } \vec{E} = \text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$ , но  $\text{grad div } \vec{E} \equiv 0$  и тогда  $\nabla^2 \vec{E} = (1/v^2) \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 \Rightarrow$  в одномерном случае получаем уравнение, называемое *волновым*:

$$\partial \vec{E}^2 / \partial x^2 - (1/v^2) \partial^2 \vec{E} / \partial t^2 = 0$$

В одномерном случае получаем для векторов напряжённости электрического и индукции магнитного полей следующие дифференциальные уравнения, которые, как мы уже ранее показывали, являются волновыми. Их решением является бегущая плоская или сферическая монохроматическая волна:

$$E = E_m \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{и} \quad B = B_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

Векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  изменяются синфазно во времени, но во взаимно перпендикулярных плоскостях и перпендикулярно направлению распространения (скорости волны):  $\vec{E} \perp \vec{B}$ ,  $\vec{E} \perp \vec{v}$ ,  $\vec{B} \perp \vec{v}$ .



Свойство взаимоперпендикулярности векторов,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  позволяет отнести электромагнитную волну к поперечным волнам.

Напомним, что волна, в отличие от колебания, представляет собой процесс с двойной периодичностью - не только во времени (как колебание), но и в пространстве. Поэтому у волны два периода: 1) во времени -  $T$  и 2) в пространстве -  $\lambda$  (длина волны) и две частоты: 1) во времени -  $\omega$

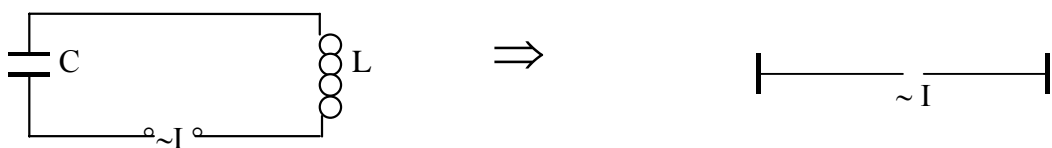
2) в пространстве -  $k$  (волновое число). Эти сопряжённые характеристики волны просто связаны через скорость распространения волны:  $\lambda/T = \omega/k = v$ .

Если в вакууме электромагнитная волна распространяется со скоростью света  $v = c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$  м/с, то в вещественной среде волна замедляется, ее скорость убывает в  $\sqrt{\epsilon \mu}$  раз, то есть  $v = c/\sqrt{\epsilon \mu} = 1/\sqrt{(\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu)}$

В каждой точке пространства значения векторов и  $\vec{B}$  пропорциональны друг другу. Отношение напряжённостей электрического и магнитного полей определяется электрическими и магнитными свойствами (проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$ ) среды и определяется следующим выражением:  $E/H = \sqrt{(\mu_0 \mu / \epsilon_0 \epsilon)}$ . Отношение  $E/H$ , как нетрудно видеть, имеет размерность сопротивления:  $V/m : A/m = V/A = \text{Ом}$ .

Применительно к вакууму, например,  $E/H = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \text{ Ом}$  - называется волновым сопротивлением вакуума. Отношение же  $E/B = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c = 3 \cdot 10^8$  м/с (в вакууме).

Процесс излучения электромагнитных волн Г. Герц осуществил посредством так называемого открытого колебательного контура:



В обычном (закрытом) электрическом контуре, возникающие за счёт внешнего источника переменного тока незатухающие электромагнитные колебания неразрывно связаны с самим контуром (с конденсатором - электрическое поле и с катушкой индуктивности - магнитное колеблющееся поле). В открытом же колебательном контуре высокочастотные электромагнитные колебания приобретают способность отрываться от контура и излучаться в окружающее пространство в виде свободных электромагнитных волн. На таком излучении и распространении электромагнитных волн основана вся радиосвязь, телевидение.

## ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Взаимодействие и поле в физике. Электромагнитное взаимодействие и поле. Классическая электродинамика, её предмет, основная идея, задачи, структура и место в физике и технике.
2. Электростатика, её предмет, основные понятия (заряд и поле), идея, задачи и место в электродинамике. Свойства электрического заряда.
3. Закон Кулона. Характер сил электростатического взаимодействия точечных зарядов.
4. Основные характеристики электрического поля - напряженность, потенциал; логика их введения, осмысления и их взаимосвязь. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности электростатического поля и их взаимоориентация.
5. Основные теоремы электростатического поля - теорема о циркуляции и теорема о потоке вектора напряженности и их физический и методологический смысл.
6. Принцип суперпозиции электрических полей. Напряженность и потенциал точечного заряда. Особенности расчета характеристик электростатических полей с помощью закона Кулона и принципа суперпозиции. Расчет поля электрического диполя.
7. Особенности расчета электростатических полей с помощью теоремы Остроградского-Гаусса. Расчет напряженности и потенциала равномерно заряженной сферы и нити (цилиндра). Объяснение результатов,
8. Расчет напряженности и потенциала равномерно заряженной плоскости, конденсатора и заряженного по объему шара. Объяснение результатов.
9. Внешние проявления электростатического поля. Сила и её работа при действии электростатического поля на точечный заряд. Момент силы и его работа при действии электростатического поля на электрический диполь.
10. Взаимодействие электростатического поля с веществом. Проводники и диэлектрики. Диэлектрики в электрическом поле. Поляризация полярных и неполярных диэлектриков.
11. Поляризованность (вектор поляризации)  $\mathbf{P}$  диэлектрика и её связь с поверхностной плотностью связанного заряда. Диэлектрическая проницаемость и её физический смысл.
12. Теорема Остроградского-Гаусса для поля в диэлектрике. Вектор  $\mathbf{D}$  индукции электростатического поля. Взаимосвязь и сравнительная характеристика векторов  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{P}$ .
13. Явления на границе раздела двух диэлектриков. Граничные условия для векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ . Преломление силовых линии на границе раздела,
14. Проводники в электростатическом поле, Поле внутри и вне (вблизи поверхности) заряженного проводника. Распределение зарядов в проводнике.
15. Емкость уединенного, в частности сферического, проводника. Конденсаторы. Вывод и физический анализ формулы для емкости плоского конденсатора.
16. Вывод и анализ формул для результирующей емкости последовательного и параллельного соединения конденсаторов.
17. Вывод и анализ формул для энергии электростатического поля заряженного уединенного проводника, системы проводников и конденсатора. Объемная плотность энергии электростатического поля.
18. Электрический ток; основные характеристики и условия существования. Законы Ома и Джоуля-Ленца для однородного участка цепи в интегральной и дифференциальной формах. Анализ понятия "электросопротивление".
19. Классическая электронная теория электропроводности металлов. Вывод закона Ома в дифференциальной форме и анализ формулы для удельного электросопротивления.
20. Вывод и анализ на основе классической электронной теории электропроводности металлов закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Ограниченность классической электронной теории электропроводности.
21. Сторонние силы. Электродвижущая сила источника тока, напряжение. Закон Ома для неоднородного участка цепи и для замкнутой цепи. Полезная мощность и к.п.д. источника тока

и их зависимость от сопротивления нагрузки.

22. Электрический ток в газах. Вольтамперная характеристика газового разряда и ее физический анализ. Виды (типы) газового разряда.
23. Магнитостатика, ее предмет, основные понятия (магнитное взаимодействие и поле), задачи, идея, место в электродинамике. Логика введения и осмысления характеристик - индукции  $\mathbf{B}$  и напряженности  $\mathbf{H}$ .
24. Основные теоремы магнитостатического поля - теорема о циркуляции и о потоке вектора  $\mathbf{B}$ , и их физический и методологический смысл. Сравнение характера, характеристик и уравнений электро- и магнитостатического полей.
25. Принцип суперпозиции магнитных полей. Закон Био-Савара-Лапласа и его применение для расчета магнитостатического поля бесконечного прямолинейного и кругового проводников с постоянным током.
26. Применение теоремы о циркуляции вектора  $\mathbf{B}$  для расчета магнитостатического поля бесконечного прямолинейного проводника с током и катушки с током (соленоида, тороида).
27. Индуктивность проводника и катушки. Вывод и физический анализ формулы для индуктивности катушки (соленоида).
28. Силовые проявления магнитостатического поля. Действие поля на контур с током, проводник, с током (сила Ампера) и движущуюся заряженную частицу (сила Лоренца). Объяснение взаимодействия проводников с током.
29. Работа перемещения проводника и контура с током в магнитном поле. Энергия магнитостатического поля катушки с током (вывод и анализ формулы). Объемная плотность энергии магнитостатического поля.
30. Явление и закон электромагнитной индукции. Правило Ленца Вывод закона электромагнитной индукции Гельмгольцем. Явление самоиндукции. Нестационарные процессы в цепи с индуктивностью.
31. Магнитное поле в веществе. Магнитные моменты атомов Намагниченность вещества. Типы магнетиков. природа и особенности диамагнетизма и парамагнетизма.
32. Ферромагнетики. Домены и спиновая природа ферромагнетизма. Кривая намагничивания и магнитный гистерезис. Точка Кюри.
33. Явления на границе раздела двух магнетитов. Граничные условия для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Преломление силовых линий на границе раздела.
34. Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Физика процессов, обуславливающих возникновение гармонических колебаний заряда и тока. Вывод и анализ формулы Томсона для периода свободных колебаний.
35. Анализ колебаний заряда и тока в контуре при наличии электросопротивления. Основные закономерности и характеристики затухающих колебаний и их физическое истолкование.
36. Вынужденные колебания заряда и тока в контуре. Составление дифференциального уравнения, его решение и характеристика резонансных кривых. Физическая сущность явления резонанса.
37. Обобщение Максвеллом представлений об электромагнитной индукции Уравнения Максвелла (в интегральной и дифференциальной формах), их физическое истолкование и место в электродинамике.
38. Электромагнитные волны. Объяснение возникновения электромагнитных волн с позиций уравнений Максвелла. Уравнение бегущей электромагнитной волны, ее особенности и характеристики. Волновое уравнение.