Лекция 26.
ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Среди всех законов природы законы сохранения занимают особое место. Исключительная общность и универсальность законов сохранения определяет их научное, методологическое и философское значение.

Своим происхождением законы сохранения обязаны свойствам симметрии природы, а не предметов, выражающимся в неизменности вида физических законов, т.е. в их инвариантности. Установлена связь между законами сохранения классической физики и свойствами симметрии пространства и времени.

Что такое симметрия?

Термин «симметрия» означает соразмерность, пропорциональность, одинаковость в расположении частей. Различает *геометрическую* симметрию – это симметрия положений, форм, структур и симметрию *физическую* - симметрию физических явлений и законов природы. Физическая симметрия лежит в самой основе естественнонаучной картины мира. Принцип симметрии лежит в основе квантовой механики, теории относительности, физики твердого тела, атомной и ядерной физики, физики элементарных частиц.

В чем содержание симметрии физических законов?

Симметрия физических законов заключается в инвариантности (неизменности) по отношению к математическим преобразованиям описывающих их уравнений и преобразованиям, связанным, например, с условиями наблюдения явления.

Мы уже знакомы с симметрией (инвариантностью) физических законов по отношению к переходу из одной инерциальной системы отсчета (ИСО) в другую ИСО, т.е. с симметрией физических законов относительно равномерного прямолинейного движения. Это отражено в *принципе относительности: ВСЯКИЙ ПРОЦЕСС ПРИРОДЫ ПРОТЕКАЕТ ОДИНАКОВО (при одинаковых начальных условиях) В ЛЮБОЙ ИСО, т.е. ВО ВСЕХ ИСО ФИЗИЧЕСКИЙ ЗАКОН ИМЕЕТ ОДНУ И ТУ ЖЕ ФОРМУ.*

В применении к механическим процессам принцип относительности был установлен Галилеем и получил обобщение на все процессы в СТО. В соответствии с самой сущностью принципа относительности Эйнштейн сформулировал принцип инвариантности скорости света по отношении к переходу из одной ИСО в другую.

Запишем соотношения, устанавливающие связь между пространственно-временными координатами события в системе K(x,y,z,t) и K`(x`,y`,x`,t`) (вспомним, что система координат K` движется вдоль оси X системы K со скоростью v):

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad & x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y, & z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\}$$

при $\left(\frac{v}{c}\right)^2 << 1$ получаются преобразования координат Галилея

$$\left.\begin{aligned} x` &= x - vt \\ y` &= y \\ z` &= z \\ t` &= t \end{aligned}\right\}$$

Симметрия физических законов по отношению к переходу из одной ИСО в другую математически выражается в том, что описывающие физический закон математические выражения должны сохранять форму при замене в них x,y,z,t на x`,y`,x`,t` (и наоборот) в соответствии с (26.1), т.е. математические законы должны обладать симметрией по отношению к преобразованиям Лоренца.

- К какому радикальному пересмотру наших представлений о пространстве и времени привело открытие симметрии физических законов по отношению к переходу от одной ИСО в другую, проявляющееся при учете конечности скорости света (симметрии по отношению к преобразованиям Лоренца)?

- К необходимости отказа от абсолютности времени (пространственно-разделенные события, являющиеся одновременными в одной СО могут быть неодновременными в другой СО), к относительности временных интервалов и необходимости совместного рассмотрения пространственных и временных преобразований.

- Симметрия физических законов относительно преобразований Лоренца (относительно перехода из одной ИСО в другую ИСО) - один из наиболее ярких примеров симметрии физических законов. Существуют и другие виды симметрии физических законов:

1. Симметрия относительно пространственных переносов, которая означает инвариантность физических законов по отношение к пространственным переносам, к сдвигу начала координат.

Инвариантность (симметрия физических законов по отношению к пространственным переносам) отражает симметрию пространства, называемую «однородность пространства». Например, два одинаковых лазера, выведенных на один и тот же режим в Москве и Новокузнецке, будут давать одно и то же излучение.

2. Симметрия относительно переносов во времени. Она называется однородностью времени и проявляется в физической эквивалентности разных его моментов. Например, с точки зрения пучков протонов безразлично, в какой день и час был запущен Серпуховский (или иной) ускоритель протонов.

Инвариантность (симметрия) физических законов по отношению к поворотам называется изотропностью пространства (для сведения: идея изотропности пространства давалась человечеству с большим трудом, она означала в мировоззренческом плане отказ от "центров мироздания") отражает физическую эквивалентность разных направлений в пространстве - это означает, что механические свойства замкнутой системе не меняются при любом повороте системы как целого в пространстве. Укажем для названных выше симметрии соответствующие им законы сохранения.

а) *Однородность пространства*, т.е. симметрия по отношению к преобразованию сдвига $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0$ *приводит к закону сохранения импульса*

б) *Однородность времени*, т.е. симметрия по отношению к преобразованию времени $t = t` + t_0$, т.е. к смещению времени на промежуток t_0, *приводит к закону сохранения энергии.*

в) *Изотропность пространства*, т.е. симметрия по отношению к повороту – к преобразованиям вида

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y &= x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{aligned}$$

(где угол φ - угол поворота координатных осей) – *приводит к закону сохранения момента импульса.*

Связь закона сохранения момента импульса со свойствами изотропности пространства свидетельствует, что поворот замкнутой системы в пространстве не изменяет ее механических свойств.

Законы сохранения импульса и энергии мы подробно, с примерами применения, - рассмотрели в лекциях по механике. Закону сохранения момента импульса такое внимание незаслуженно не было уделено. Рассмотрим его подробнее.

Закон сохранения момента импульса

Это один из фундаментальных законов механики. Моментом импульса материальной точки с импульсом $\vec{p}$ называется вектор $\vec{L}$, отражаемый соотношением

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

где *r* - радиус-вектор материальной точки.

Таким образом, момент импульса зависит от выбора начала отсчета О (рис.26.1).

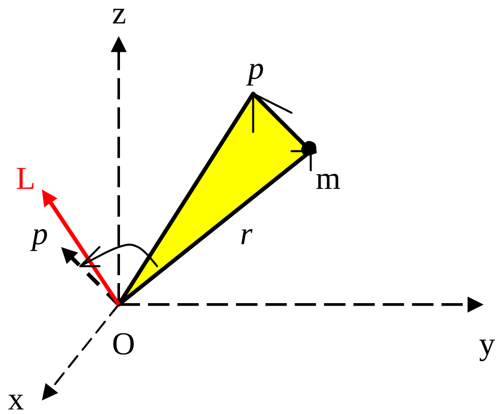


Рис.26.1. Момент импульса материальной точки m, обладающей импульсом *p*

Напомним правило определения вектора *L*, вытекающее из векторной алгебры и формулы (26.2). По модулю *L* равен L = r p sin (*r*, *p*), т.е. произведению модулей радиус-вектора импульса и синуса угла между векторами *r* и *p*; направлен вектор *L* перпендикулярно плоскости расположения векторов *p* и *r* (на рис.26.1 - плоскость «залитого» треугольника) в ту сторону, откуда вращение от вектора *r* к вектору *p* на меньший угол наблюдается против стрелки часов (удобно мысленно перенести параллельно самому себе вектор *p* в начало координат - штриховое изображение вектора *p* на рис.26.1).

Момент импульса произвольной совокупности материальных точек m_i с импульсами p_i определяется как векторная сумма их моментов импульсов

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i .$$

Вектор *L* называют моментом импульса системы N точек. Основное свойство этой величины: *скорость изменения момента импульса равна моменту внешних сил, действующих на систему, вычисленному относительно того же начала отсчета, что и L:*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \qquad (26.4)$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{k} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$ - момент сил.

r_i - радиус-вектор точки приложения силы,

F_i - внешние силы,

k - количество действующих на систему сил.

Особое значение для инженерной практики имеют системы материальных точек, объединенные в твердые тела. Если пренебречь деформацией твердого тела (т.е. не учитывать изменение формы и размеров тела под действием внешних нагрузок), то мы будем иметь идеализированный объект, который получил название абсолютно твердого тела. Если такое тело привести в состояние вращательного движения, то окажется, что все его точки будут характеризоваться одинаковым вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, который называется угловой скоростью абсолютно твердого тела. Это свойство позволяет выразить момент импульса твердого тела *L* через вектор его угловой скорости $\vec{\omega}$. Для этого в формуле (26.3) необходимо выразить импульс i-той точки p_i через вектор угловой скорости $\left(\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]\right)$:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{r}_i \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]],$$

а затем применить правило выполнения двойного векторного произведения $([\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}))$ («БАЦ минус ЦАБ»)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left\{\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}(\vec{r}_i \vec{\omega})\right\}. \qquad (26.5)$$

Из этого выражения вытекает, что вектор *L* может быть направлен параллельно $\vec{\omega}$ только в том случае, если $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i (\vec{r}_i \vec{\omega})$ совпадает по направлению $\vec{\omega}$.

Дальше мы проанализируем те случаи, в которых возможна такая ситуация. А в общем случае формула (26.5) показывает, что *вектор момента импульса твердого тела L может не совпадать по направлению с вектором угловой скорости* $\vec{\omega}$.

Выберем неподвижную декартову систему координат XYZ и спроектируем равенство (26.5) на координатные оси:

$$L_x = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega_x r_i^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i X_i (X_i \omega_x + Y_i \omega_y + Z_i \omega_z),$$
$$L_y = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega_y r_i^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i Y_i (X_i \omega_x + Y_i \omega_y + Z_i \omega_z),$$
$$L_z = \sum_{i=1}^{N} m_i \omega_z r_i^2 - \sum_{i=1}^{N} m_i Z_i (X_i \omega_x + Y_i \omega_y + Z_i \omega_z).$$

Сгруппируем слагаемые с одинаковыми проекциями угловой скорости:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}\right\} \qquad (26.6)$$

где введены обозначения:

$I_{xx} = \sum_{i=1}^{N} m_i (r_i^2 - X_i^2) = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_{xi}^2$, $\rho_{xi}^2 = r_i^2 - X_i^2$ - квадрат расстояния от точки «i» до оси OX; $I_{yy} = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_{yi}^2$, ρ_{yi}^2 - квадрат расстояния точки «i» до оси OY;

$I_{zz} = \sum_{i=1}^{N} m_i \rho_{zi}^2$, ρ_{zi}^2 - квадрат расстояния точки «i» до оси OZ;

$I_{xy} = I_{yx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i Y_i X_i$; $I_{xz} = I_{zx} = -\sum_{i=1}^{N} m_i X_i Z_i$;

$I_{yz} = I_{zy} = -\sum_{i=1}^{N} m_i Y_i Z_i$.

В разделе математики, посвященном изучению свойств векторов, систему равенств (26.6) записывают в сокращенном виде:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \qquad (26.7)$$

Еще более компактно то же можно записать в виде

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}. \qquad (26.8)$$

Сопоставляя формулы (26.8) и (26.7), получаем

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} \equiv \vec{L}, \quad \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \equiv \hat{I} \quad \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \equiv \vec{\omega}.$$

Величина $\hat{I}$, определяемая в общем случае 9-ю компонентами (матрицей чисел 3х3), называется тензором инерции твердого тела, а произведение $\hat{I} \times \vec{\omega}$ (тензора $\hat{I}$ на вектор $\vec{\omega}$) - это новая операция над вектором, смысл которой дается формулами (26.6). Мы знаем, что умножение вектора на скалярное число может изменить только модуль вектора, не изменяя его направления, или изменить его на обратное (если число<0). Новая операция (26.8) изменяет не только модуль вектора $\vec{\omega}$, но и его направление на любой угол в пределах ($0 \le \alpha \le \pi$).

Рассмотрим основные свойства тензора инерции (для более детального ознакомления со свойствами тензоров отсылаем студентов к специальным учебникам по математике).

1. Тензор является симметричным, т.е.

$$I_{xy} = I_{yx}, \quad I_{xz} = I_{zx}, \quad I_{yz} = I_{zy},$$

поэтому максимальное число его независимых компонент не 9, а 6. *Компоненты I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} (стоящие на "главной диагонали" матрицы 3х3) называются осевыми моментами инерции твердого тела* относительно осей координат X,Y,Z соответственно. Недиагональные компоненты I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} - это так называемые центробежные моменты инерции твердого тела. Смысл этих названий можно раскрыть, анализируя динамику вращательного движения твердого тела.

2. Среди множества осей XYZ имеются такие, в которых тензор инерции имеет только диагональные элементы I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, а все недиагональные обращаются в 0. Оси этой особой декартовой системы называются собственными (или главными) осями тензора инерции, а осевые моменты инерции твердого тела относительно этих осей *- главными моментами инерции твердого тела*. Компоненты-проекции момента импульса на главные оси инерции можно вычислить из соотношений (26.6)

$$\left.\begin{aligned} L_x^o &= I_{xx}^o \omega_x^o, \\ L_y^o &= I_{yy}^o \omega_y^o, \\ L_z^o &= I_{zz}^o \omega_z^o, \end{aligned}\right\} \qquad (26.9)$$

где индексами (о) отмечены проекции векторов L и ω на главные оси инерции, а также главные осевые моменты инерции твердого тела $I^o_{xx}, I^o_{yy}, I^o_{zz}$.

В качестве иллюстрации свойств тензора инерции приведем вычисление его элементов в простейшем случае - твердое тело состоит из двух материальных точек m_1 и m_2 одинаковой массы m, расположенных на расстоянии 2l друг от друга. Вычислим элементы тензора инерции при произвольной ориентации осей координат, задаваемой "направляющими" косинусами $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, где α, β, γ - углы между осями координат OX, OY, OZ с направлением отрезка, соединяющего две точки нашего тела (рис.26.2,а), (начало координат в центре масс).

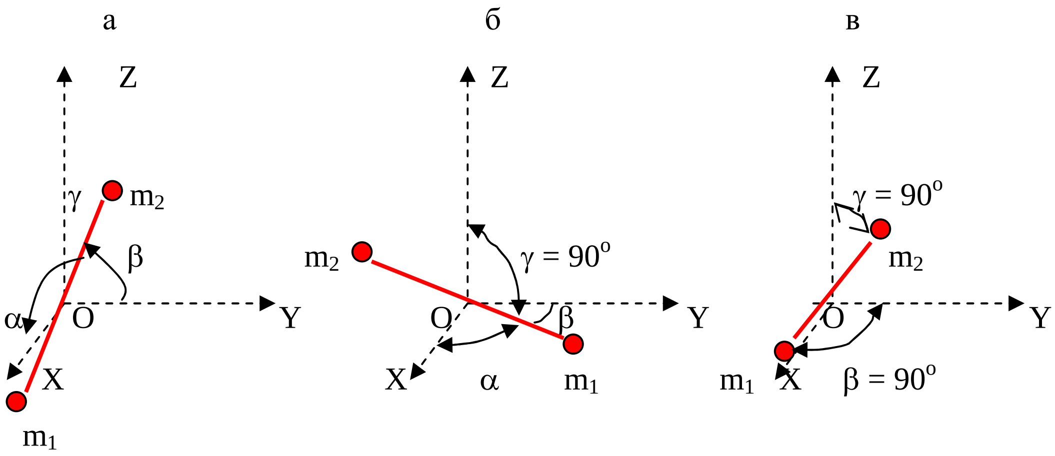


Рис.26.2. Расположение двухточечного твердого тела в различных системах координат

Координаты точек: m_2 (1cosα,1cosβ, 1cosγ) и m_1 (-1cosα,-1cosβ, -1cosγ). Применим правила вычисления элементов тензора инерции, данные в описании формулы (26.6)

$$I_{xx} = m(l^2 - l^2\cos^2\alpha) + m(l^2 - l^2\cos^2\alpha) = 2ml^2\sin^2\alpha;$$

$$I_{yy} = 2ml^2\sin^2\beta; \quad I_{zz} = 2ml^2\sin^2\gamma;$$

$$I_{xy} = -(ml^2\cos\alpha\cos\beta + ml^2\cos\beta\cos\alpha) = -2ml^2\cos\alpha\cos\beta;$$

$$I_{xz} = -2ml^2\cos\alpha\cos\gamma; \quad I_{yz} = -2ml^2\cos\beta\cos\gamma.$$

Матрица тензора инерции нашего двухточечного тела имеет вид

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2ml^2\sin^2\alpha & -2ml^2\cos\alpha\cos\beta & -2ml^2\cos\alpha\cos\gamma \\ -2ml^2\cos\alpha\cos\beta & 2ml^2\sin^2\beta & -2ml^2\cos\beta\cos\gamma \\ -2ml^2\cos\alpha\cos\gamma & -2ml^2\cos\gamma\cos\beta & 2ml^2\sin^2\gamma \end{pmatrix}.$$

Разместим теперь систему координат так, как изображено на рис. 26.2, б, т.е. две точки m_1 и m_2 расположим в плоскости XOY. Теперь их координаты: m_2 (1cosα,1cosβ, 0) и m_1 (-1cosα, -1cosβ, 0) и тензор инерции изобразится матрицей

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 2ml^2 \sin^2\alpha & -2ml^2\cos\alpha\cos\beta & 0 \\ -2ml^2\cos\beta\cos\alpha & 2ml^2\sin^2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 2ml^2\sin^2\gamma \end{pmatrix}.$$

Если выбрать систему координат так, чтобы одна из осей (например, OX) проходила через обе точки (см. рис. 26.2,в), то тензор инерции будет иметь вид диагональной матрицы

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ml^2 \end{pmatrix}.$$

Осевой момент $I_{xx} = 0$, т.к. тело состоит из материальных точек, не имеющих размеров. Видно, что третий вариант выбора осей привел к системе координат, состоящей из главных осей инерции нашего тела. Отметим, что они совпали с осями симметрии материального тела.

Математики разработали процедуру, с помощью которой можно найти расположение главных осей инерции для тел сколь угодно сложной формы.

Теперь мы с вами достаточно подготовлены математически для того, чтобы произвести анализ свойств момента импульса твердого тела при различных способах его вращения.

Рассмотрим поведение свободного твердого тела, например, помещенного в глубоком Космосе вдали от притягивающих объектов. В таких условиях выполняется закон сохранения момента импульса, а центр масс движется как свободная материальная точка. Следовательно, его можно принять за начало отсчета инерциальной системы координат. Вектор момента импульса L = const, а что же можно сказать относительно вектора угловой скорости? Рассмотрим тело в некоторый фиксированный момент времени t = 0. Выберем главные оси инерции этого тела в качестве координатных осей OX, OY, OZ. В этом случае компоненты вектора момента импульса $\vec{L}$ связаны о компонентами $\vec{\omega}$ соотношениями (26.9). В каком случае эти два вектора будут параллельны? Имеются две возможности:

1. Вектор $\vec{\omega}$ направлен по одной из главных осей инерции, т.е. в нашем случае осей координат. Пусть это будет, например, ось X. Тогда компоненты $\omega_y = \omega_z = 0$, и, соотношения (26.9) приводят к формулам

$$\left.\begin{aligned} L_x^o &= I_{xx}^o \omega_x = I_{xx}^o \omega \ , \\ L_y^o &= 0, \\ L_я^o &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (26.10)$$

Поскольку $\vec{L} = \text{const}$, то из (26.10) вытекает, что и $\vec{\omega} = \text{const}$.

2. Вектор $\vec{\omega}$ направлен произвольно, т.е. $\omega_x \neq 0$, $\omega_y \neq 0$ $\omega_z \neq 0$, но тело имеет симметрию, приводящую к одинаковым главным осевым моментам инерции: $I_{xx}^o = I_{yy}^o = I_{zz}^0 = I$. Примерами таких тел могут служить однородные куб, шар, кубические и сферические оболочки и некоторые другие, обладающие симметрией не ниже куба (шар имеет симметрию более высокую, чем куб). В этом случае из соотношений (26.9) вытекает

$$\left.\begin{aligned} L_x^o &= I \cdot \omega_x , \\ L_y^o &= I \cdot \omega_y , \\ L_z^o &= I \cdot \omega_z . \end{aligned}\right\} \qquad (26.11)$$

Формулы (26.11) показывают, что вектора L и $\vec{\omega}$ для тел, имеющих кубическую и более высокую симметрию, всегда параллельны, как бы ни был направлен вектор $\vec{\omega}$. И снова из L = const, соотношения (26.11) приводят к $\vec{\omega}$ = const.

Других возможностей для совпадения векторов L и $\vec{\omega}$ *в природе не существует.* Следовательно, мы делаем вывод: при вращении *свободного тела* произвольной формы вокруг любой из его *главных осей инерции*, либо при вращении тела с симметрией выше куба (т.е. тел с одинаковыми главными моментами инерции) вокруг произвольной оси сохраняются и момент импульса L и угловая скорость $\vec{\omega}$ (более глубокий анализ показывает, что вращение тел с различными главными моментами инерции ($I_{xx}^o \neq I_{yy}^o \neq I_{zz}^0$) будет устойчивым лишь при выборе осей вращения, совпадающих с главными осями с наибольшим и наименьшим моментами инерции).

Как будет вести себя вектор $\vec{\omega}$ в случаях, когда $\vec{\omega}$ не совпадает с L? В общем случае поведение вектора угловой скорости может быть довольно сложным: он изменяет свою ориентацию в пространстве и может изменяться по модулю и все это - без внешних воздействий на тело!

Таким образом, вращательное движение твердого тела оказывается довольно сложным явлением даже в отсутствие внешних воздействий на тело. Мы можем только догадываться о тех трудностях, которые возникают при решении задач динамики, связанных с описанием вращательного движения под действием внешних сил вокруг центра масс тела. Эти задача возникают пока что в инженерных разработках, связанных с управлением движения космических аппаратов, например, при расчете маневров космических станций при стыковках. Для "земной" инженерии более важным является поведение твердого тела, совершающего вращательное движение относительно оси, фиксированной в пространстве. Такую фиксацию в технике выполняют с помощью подшипников, закрепленных неподвижно в пространстве.

Как ведет себя твердое тело в этих условиях? ПРИМЕНЯЯ общее уравнение динамики вращательного движения (26.4) и выбирая ось Z по направлению вектора $\vec{\omega}$, т.е. по направлению закрепленной оси вращения (в этом случае компоненты вектора $\vec{\omega}$: $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$), формул (26.6) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \frac{d(I_{xx}\omega)}{dt} = M_x, \\ \frac{dL_y}{dt} &= \frac{d(I_{yy}\omega)}{dt} = M_y, \\ \frac{dL_z}{dt} &= \frac{d(I_{zz}\omega)}{dt} = M_z. \end{aligned}\right\} \qquad (26.12)$$

Поскольку при вращении вокруг оси OZ момент инерции $I_{zz} = \mathrm{const}$ (не изменяются расстояния любых точек тела до оси OZ, т.е. эти точки движутся по окружностям с центрами на оси OZ), третье равенство из (26.12) можно переписать так:

$$I_{zz}\frac{d\omega}{dt} = M_z.$$

Отсюда вытекает, что модуль вектора угловой скорости может быть изменен лишь с помощью момента внешних сил, имеющего Z -составляющую, $M_z \neq 0$. Если $M_z = 0$ (идеальные подшипники, не создающие момента сил трения, вращение в среде без сопротивления), то вектор $\vec{\omega} = \mathrm{const}$. А вектор *L*? Из соотношений (26.6) вытекает, что в нашем случае ($\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$):

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega, \\ L_y &= I_{yy}\omega, \\ L_z &= I_{zz}\omega. \end{aligned}\right\}$$

Учитывая, что $I_{zz} = \mathrm{const}$, получаем $L_z = \mathrm{const}$. Однако, если ось OZ *не является главной осью инерции тела,* то $I_{xz} \neq 0$, $I_{yz} \neq 0$ и существует составляющая момента импульса, расположенная в плоскости XOY, т.е. перпендикулярная оси OZ. В процессе вращения тела в неподвижной системе координат (XYZ) вокруг оси Z X - и Y - координаты всех его точек изменяются, что приводит к изменяющимся во времени

$$I_{xz}(t)=\sum_{i=1}^{N} m_i X_i(t) Z_i \quad \text{и} \quad I_{yz}(t)=\sum_{i=1}^{N} m_i X_i(t) Z_i .$$

Если ввести систему координат (X`,У`,Z`), скрепленную с телом осью Z`, совпадающей с осью вращения, то в ней, естественно. $I_{x`z`}$ = const и $I_{y`z`}$ = const а, следовательно, и компоненты вектора *L*: $L_{X`} = I_{X`Z`} \cdot \omega$ = CONST И $L_{Y`} = I_{Y`Z`} \cdot \omega$ = CONST.
Следовательно, вектор *L* неподвижен относительно вращающегося тела, т.е. вращается вместе с телом (рис.26.3.а).

а

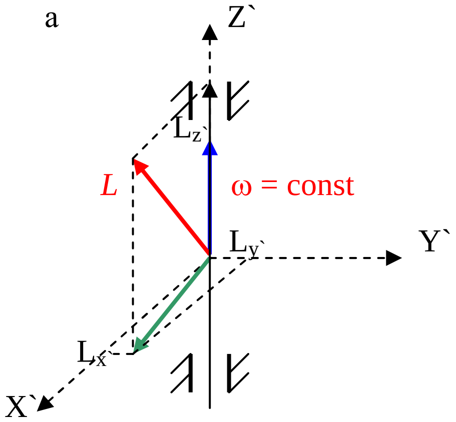


Рис. 26.3,а. Вращение тела вокруг закрепленной оси вращения.

б

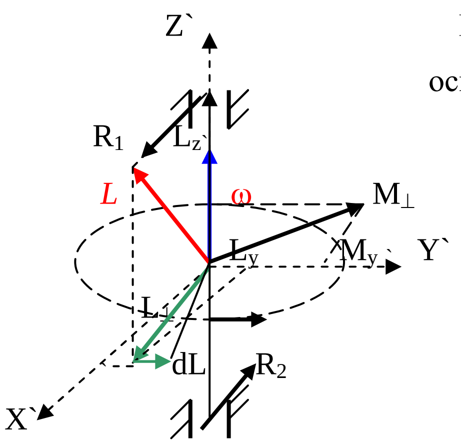


Рис. 26.3,б. Вращение тела вокруг закрепленной оси вращения, возникновение поперечного момента.

Можно сделать вывод: при свободном вращении тела вокруг оси, не совпадающей с главной осью инерции тела, угловая скорость тела сохраняется ($\vec{\omega}$ = const); сохраняется также проекция момента импульса на ось OZ (L_z = const). Поперечная к оси Oz компонента вектора *L* не равна 0 и вращается так же, как и вектор угловой скорости тела, сохраняясь по величине (т.е. $L_x^2 + L_y^2 = \text{const}$).

Какие же воздействия на тело приводят к изменению положения в пространстве вектора *L* при свободном вращении (модуль |*L*| = const)? Первые две строки в формулах (26.12) говорят, что должны существовать M_x и M_y - компоненты вектора момента силы в плоскости XOY. Прежде всего отметим, что эти компоненты могут создаваться реакциями подшипников при фиксации в пространстве оси вращения (R_1 и R_2 на рис. 26.3,б).

Момент этих сил можно рассчитать, и не прибегая к формулам (26.12).

Рассмотрим изменение d*L* вектора *L* за бесконечно малое время dt. Поскольку вектор *L* вращается вместе с телом, его поперечная компонента $L_\perp$ провернется в плоскости (XOY) на угол $d\alpha = \omega dt$, а $L_z = const$. В этом движении вектора $L_\perp$ и будет образовано приращение вектора $dL = L_\perp d\alpha = L_\perp \omega dt$. Направление этого приращения совпадает с направлением линейной скорости конца вектора *L*. Следовательно, в векторной форме можно записать приращение d*L* в виде $dL = [\vec{\omega} \times L] \cdot dt$;
используя (26.4), получаем

$$\vec{M}_\perp = \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\omega} \times \vec{L}_\perp]. \tag{26.13}$$

Вычислим модуль момента $|\vec{M}_\perp|$:

$$M_\perp = \omega L_\perp = \omega\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = \omega^2 \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}. \tag{26.14}$$

Видно, что величина поперечного момента сил реакций подшипников зависит от ω и центробежных моментов инерции тела I_{xz} и I_{yz}.

На этом этапе мы сможем понять, почему недиагональные элементы тензора инерции получили название центробежных. Если привести во вращение твердое тело вокруг оси, не совпадающей ни с одной из главных осей инерции, то подшипники, фиксирующие ось в пространстве, должны воздействовать на тело, создавая момент $\vec{M}_\perp$. Проще всего это можно понять, рассматривая вращение твердого тела, изображенного на рис.26.2,а, вокруг оси OZ. Каждая из точек m_1 и m_2 совершает движение по окружности с центром на оси OZ и радиусом $l\sin\gamma$. Из кинематики движения по окружности нам должно быть известно, что в таком движении точка имеет ускорение $\omega^2\, l \sin\gamma$, направленное к центру окружности (центростремительное ускорение). Ускорение создается внешней силой $F_{цс} = m\omega^2\, l \sin\gamma$. В нашем примере силы, приложенные к обеим точкам, равны по величине и противоположны но направлению, т.е. образуют пару сил с моментом $M_{цс} = F_{цс}\, h$, где h – плечо пары сил, $h = l\cos\gamma$. Следовательно, момент центростремительных сил в нашем случае оказывается равным

$$M_{цс} = 2m\omega^2 l^2 \sin\gamma \cos\gamma. \tag{26.15}$$

Поскольку рассматриваемое вращение предполагается свободным, никаких сил, кроме реакций подшипников, к телу не приложено, и мы должны предположить, что момент $M_{цс}$ создается именно силами реакций подшипников и через жесткие связи переносится на материальные точки m_1 и m_2. Сравним $M_{цс}$ с $M_\perp$, рассчитанным по формуле (26.14)

$$M_\perp = \omega^2\sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2} = \omega^2\sqrt{(2ml^2\cos\alpha\cos\gamma)^2 + (2ml^2\cos\beta\cos\gamma)^2} =$$
$$= 2m\omega^2 l^2\cos\gamma\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}.$$

Используя свойство направляющих косинусов, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, получаем

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\gamma = \sin^2\gamma$ и $M_\perp = 2m\omega^2 l^2\cos\gamma\sin\gamma$, что совпадает с $M_{цс}$ в (26.15).

Таким образом, *поперечный момент сил реакций подшипников $M_\perp$,* возникающий при вращении твердого тела вокруг оси, не совпадающей с главной осью инерции тела, *имеет природу момента центростремительных сил, необходимых для вращения по окружности всех точек твердого тела.*

Подшипники испытывают действие сил со стороны закрепленной в них оси вращения, момент которых называют моментом центробежных сил. Его модуль равен $M_\perp$ и рассчитывается по формуле (26.14). Именно это обстоятельство породило название элементов тензора инерции I_{xz} и I_{yz} - "центробежные моменты инерции".

Если вращение происходит вокруг оси OX, то $M_\perp = \omega^2\sqrt{I_{yx}^2 + I_{zx}^2}$, а вокруг оси OY - $M_\perp = \omega^2\sqrt{I_{zy}^2 + I_{xy}^2}$.

Приведенный анализ вращения вокруг закрепленной оси позволяет сделать важный для инженерной практики вывод.

Если твердое тело совершает вращение даже с постоянной угловой скоростью вокруг оси, не совпадающей с главной осью инерции, в подшипниках со стороны оси твердого тела возникают силы, величина момента которых определяется центробежными моментами инерции тела (26.14). Эти нагрузки являются знакопеременными и создают вибрации даже в том случае, когда ось вращения проходит через центр масс тела.

Исключать такие нагрузки можно, лишь совмещая ось вращения с главной осью инерции. В этом случае исчезает поперечная компонента момента импульса, и он остается постоянным при ω = const.

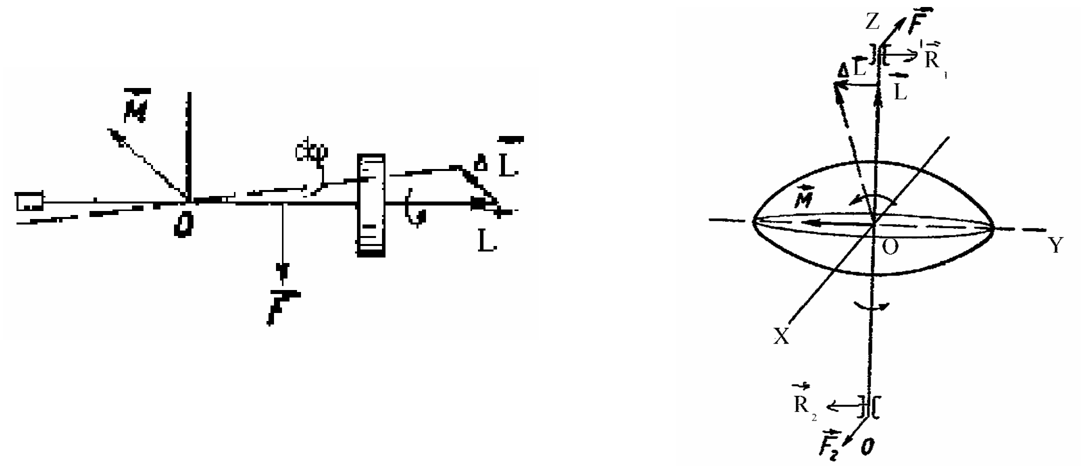
В заводских условиях этого добиваются с помощью процедуры динамической балансировки деталей, предназначенных в качестве быстровращающихся роторов, например, роторов турбогенераторов, быстроходных электродвигателей.

Закон сохранения момента импульса обеспечивает возможность гироскопического эффекта. Гироскопом называется массивное симметричное тело, быстро вращающееся вокруг оси (рис.26.4,а).

На стержне С, установленном на опоре и способном легко вращаться относительно точки О в горизонтальной плоскости, закреплен массивный маховик А, уравновешенный грузом В. Маховик приведен в быстрое вращение.

Подействуем на уравновешенный гироскоп (рис. 26.4, а) дополнительной силой *F*, момент которой относительно точки О не равен нулю Тогда согласно уравнению динамики (26.4) вектор момента импульса получит приращение $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$, по направлению совпадающее с вектором момента силы $\vec{M}$. Новое положение оси и момента импульса найдем, сложив геометрически векторы *L* и ΔL.

Из закона сохранения момента импульса *L* = const (т.е. вектор *L* стремится сохранить свою величину и направление в пространстве) следует, что поворот основания гироскопа (см. рис. 26.4,а) вокруг оси Z в любую сторону не нарушает ориентации оси гироскопа.



а б

Рис.26.4. Схема гироскопа

Если же ось гироскопа закреплена в подшипниковых опорах (см. рис.26.4,б), то воздействие пары сил F_1 и F_2 в плоскости ZOX, приводящее к возникновению момента сил *M*, действующего в направлении оси Y возбуждает гироскопические силы. Поскольку изменение положения оси гироскопа в направлении Y невозможно, приращение ΔL момента импульса L компенсируется силами реакции опор R_1 и R_2 в плоскости ZOY.

Наличие гироскопических сил позволяет применять быстровращающиеся волчки, установленные в кардановом подвесе, для устройства гироскопических компасов для управления воздушными и морскими судами, для успокоения качки судов, управления ракетами и точного наведения движущихся орудий, для поддержания ориентации спутников. Например, на космической станции «Мир» установлены 9 гироскопов, гарантирующих стабилизацию ее положения в пространстве и его корректировки для обеспечения оптимальной ориентации солнечных батарей. Об их остановке крик поднимается на весь остальной мир.

Вращение снарядов вокруг собственной оси стабилизирует траекторию их полета. В микромире воздействия магнитного поля на вещество приводят к прецессии спинов микрочастиц.